Bohms teori bryder med princippet om impulsbevarelse!

Erland Brun Hansen

I artiklen vises, at Bohms teori for en fri partikel medfører, at partiklen kan overføre impuls til sig selv via det såkaldte kvantepotentiale. Da Bohm teorien således bryder med princippet om impulsbevarelse, er det tvivlsomt, om den kan levere en grundlæggende fortolkning af kvantemekanikken.

Hvad er Bohm teoriens status i dag? Jeg tror de fleste fysikere anlægger et pragmatisk synspunkt. Når nu Bohm teorien giver samme eksperimentielle forudsigelser som kvantemekanikken, hvorfor så introducere dette mærkelige kvantepotentiale? Men der findes også fysikere, der har et mere positivt og konstruktivt syn på Bohm teorien, sådan som det f.eks. kommer til udtryk i artiklen *Nine formulations of quantum mechanics* [1].

I Lars Becker-Larsens film Københavnerfortolkningen får man et godt indtryk af hvad forskellige fysikere mener om Bohm teorien. Med hensyn til at opnå et overblik kan jeg varmt anbefale diskussionen af Bohm teorien i [2].

Formålet med denne artikel er at fremdrage et træk ved Bohm teorien der (så vidt jeg ved) er forblevet upåagtet, nemlig at denne teori er i strid med princippet om impulsbevarelse. Lad os forestille os et stort område af rummet, der er feltfrit og tømt for partikler bortset fra, at der befinder sig en elektron i det. Antag at bølgefunktionen til begyndelsestidspunktet har en gaussisk form. I artiklen vises det, at Bohm teorien foreskriver en tidsudvikling for et sådant system, der enten forøger eller formindsker dets impuls.

Bohm teorien

I den kvantemekaniske beskrivelse af et isoleret system har vi korrespondancen

$$\text{fysisk tilstand} \longleftrightarrow \text{bølgefunktion } \psi \qquad (1)$$

således at forskellige fysiske tilstande beskrives ved hjælp af forskellige bølgefunktioner og forskellige bølgefunktioner beskriver forskellige fysiske tilstande, som afviger fra hinanden. Strengt taget står ψ i (1) for klassen af bølgefunktioner $e^{i\alpha}\psi$, hvor $e^{i\alpha}$ er en fysisk set betydningsløs fasefaktor. Den operationelle betydning af bølgefunktionen kommer frem, når vi bryder systemets isolation og måler på det, idet bølgefunktionen tillader beregning af sandsynlighederne for de mulige udfald af enhver tænkelig måling. Det afgørende i nærværende sammenhæng er, at gyldigheden af (1) forudsætter, at bølgefunktionen giver en udtømmende beskrivelse af et systems fysiske tilstand.

I Bohm teorien [3][4] henviser bølgefunktionen til et ensemble. For et individuelt system i ensemblet befinder elektronen sig til begyndelsestidspunktet $t = 0$ et bestemt men ukendt sted x_0 (i det følgende gennemføres diskussionen i en dimension). Elektronens sted optræder i teorien som en såkaldt skjult variabel. Sandsynligheden for at x_0 ligger i intervallet $(x, x+dx)$ er

$$\psi^*(x,0)\psi(x,0)dx$$

Selvom alle ensemblets systemer er beskrevet ved hjælp af samme bølgefunktion, afviger disse systemers fysiske tilstand fra hinanden ved, at værdien af den skjulte variabel varierer fra system til system. Så det er et af de punkter, hvor Bohm teorien afviger fra kvantemekanikken, at førstnævnte ikke tilfredsstiller (1).

I følge Bohm teorien [4] beskriver bølgefunktionen: "an objectively real ψ-field that can act on the particle". Partiklen påvirkes af kvantepotentialet U via dettes gradient ∇U, som forårsager kraftfeltet $-\nabla U$. Idet bølgefunktionen skrives på formen

$$\psi = Re^{iS/\hbar} \qquad (2)$$

hvor R og S er reelle funktioner af tid og sted, er kvantepotentialet defineret som

$$U = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}; \qquad (\Delta \equiv \nabla^2) \qquad (3)$$

Vi har altså den situation, at ensemblets systemer har det tilfælles, at de alle har samme kvantepotentiale, $U(x,t)$, men adskiller sig ved, at det skjulte sted varierer fra system til system.

Partikelbevægelse i Bohm teorien

Bortset fra introduktionen af kvantepotentialet fastholder Bohm teorien på mange måder klassisk ontologi. F.eks. har fysiske størrelser altid talværdier. Og partikelbevægelse sker langs trajektorier ligesom i klassisk mekanik. Vi ønsker at undersøge elektronbevægelserne i et ensemble, der til begyndelsestidspunktet er beskrevet ved hjælp af bølgefunktionen

$$\psi(x,0) = (2\pi)^{-1/4}(\Delta x)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta x^2}\right). \qquad (4)$$

Da hvert af ensemblets systemer som tidligere nævnt er en elektron alene i verden, har vi

$$V(x) = 0 \qquad (5)$$

således at elektronen alene påvirkes af en kraft fra dens eget tilknyttede kvantepotentiale.

I Bohm teorien er impulsen givet som $p = \nabla S$. Af (2) og (4) følger det derfor, at alle ensemblets elektroner har impulsen nul til begyndelsestidspunktet. Men hvordan udvikler ensemblet sig i tiden? Det er et krav, at sandsynligheden for at elektronen i et individuelt system i ensemblet befinder sig i intervallet $(x, x + dx)$ til ethvert tidspunkt er givet som $\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$. Dette krav kan bruges til at få en fornemmelse for, hvordan ensemblets elektroner bevæger sig. Løsning af Schrödingerligningen viser, at

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \psi^*(x,t)\psi(x,t) \\ &= f(t)\exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta^2(t)}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

hvor

$$\Delta(t) = \Delta x(1 + kt^2)^{1/2} \tag{7}$$

med

$$k = \frac{\hbar^2}{4m^2\Delta x^4}. \tag{8}$$

Hvis Δx er af nanostørrelse ses det, at $k \approx 10^{28}$ s^{-1}, der understreger, hvor lynende hurtigt bølgefunktionen udbreder sig i rummet. Men den hastige udbredelse af sandsynlighedstætheden (6) må betyde, at elektronerne i ensemblet næsten eksplosionsagtig må bevæge sig væk fra centrum ($x = 0$), for ellers kan det ovenfor omtalte krav ikke opfyldes.

Bevægelsen af en elektron, der til begyndelsestidspunktet befinder sig i x_0, kan findes ved hjælp af følgende procedure [2][3].

1. Løsning af Schrödingerligningen og beregning af kvantepotentialet $U(x,t)$
2. Løsning af bevægelsesligningen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla U(x,t) \tag{9}$$

med grænsebetingelsen $x = x_0$ for $t = 0$.

Da $R = P^{1/2}$ kan kvantepotentialet beregnes ved hjælp af (3) og (6). Gennemførelse af denne beregning viser, at kvantekraften bliver

$$F(x,t) = -\nabla U(x,t) = mk(1 + kt^2)^{-2}x. \tag{10}$$

Indsættelse af (10) i (9) og løsning af den fremkomne differentialligning giver resultatet

$$x(t) = x_0(1 + kt^2)^{1/2}. \tag{11}$$

Fordelingen af elektronbevægelser i ensemblet bestemmes så af, at sandsynligheden (for et individuelt system) for at x_0 ligger i intervallet $(x, x + dx)$ er $\psi^*(x,0)\psi(x,0)dx$, hvor $\psi(x,0)$ er givet i (4).

Bruddet på impulsbevarelse

Af (11) følger det, at impulsen af en elektron, der til begyndelsestidspunktet befinder sig i x_0, er

$$p(t) = mx_0k(1 + kt^2)^{-1/2}t. \tag{12}$$

På grund af k's kæmpestørrelse nærmer impulsen sig lynhurtigt grænseværdien af (12) for $t \to \infty$. Ved hjælp af (8) ses det, at denne grænseværdi er

$$p_{\text{påført}} = \frac{1}{2}\frac{x}{\Delta x^2}\hbar. \tag{13}$$

Den påførte impuls kan i princippet være vilkårlig stor, men som det fremgår af (4), fylder situationer, hvor $|x_0| \gg \Delta x$, procentisk meget lidt i ensemblet.

Elektronen og dens tilknyttede kvantepotentiale er uløseligt forbundet. Er der en elektron, er der også et kvantepotentiale. Og er der ingen elektron, er der ingen bølgefunktion og derfor i følge (3) heller intet kvantepotentiale. Kvantepotentialet har ingen selvstændig eksistens, men eksisterer alene sammen med elektronen. Det kan altså ikke sammenlignes med et "ydre" klassisk potential, der eksisterer uafhængigt af den partikel, det påvirker. Elektron + tilknyttet kvantepotentiale er ét system, der under betingelsen (5) burde have impulsen som bevægelseskonstant.

Via kvantekraften er elektronen blevet påført impulsen (13) af kvantepotentialet (og lad os overveje det tilfælde hvor $x_0 > 0$). Er kvantepotentialets impuls aftaget med samme beløb? Nej, for det er overhovedet ikke muligt at tilordne kvantepotentialet en variabel impuls. For uafhængigt af om det har påført elektronen en kæmpeimpuls (stor værdi af $x - 0$) eller en forsvindende lille impuls er dets tidslige ændring nøjagtig den samme, nemlig den der i følge (2) og (3) dikteres af Schrödingerligningen. Impulsforholdene for kvantepotentialet kan præciseres. Af (3) og (4) følger det, at $U(x_0, 0)$ er symmetrisk med hensyn til x. Da der på basis af et symmetrisk skalart felt ikke kan genereres en fortrinsretning (den positive eller negative x-akses retning) må kvantepotentialet nødvendigvis tilskrives impulsen nul. Og da tidsudviklingen af kvantepotentialet fastholder den lige omtalte symmetri, gælder dette til ethvert tidpunkt.

Lad os se på det samlede udviklingsforløb. For de af ensemblets systemer, hvor $x_0 > 0$, er systemets impuls blevet forøget med beløbet (13), medens resten af systemerne har fået en tilsvarende negativ impuls. Dette træk, at isolerede systemer af sig selv kan forøge (eller formindske) deres impuls, er så klokkerent et brud på impulsbevarelse, som man kan ønske sig. Kvantepotentialet påvirker elektronen, men denne virker ikke tilbage. Det er det, der er årsag til miseren.

Af (4) ses det, at

$$\langle x_0 \rangle_{\text{ensemble}} = 0 \tag{14}$$

der sammen med (13) viser, at den samlede impulsoverførsel til ensemblets elektroner er nul, således at der er impulsbevarelse på ensemble basis. Men da der ikke er kommunikation mellem systemerne i et ensemble, kan dette ikke redde de brud på impulsbevarelse, der finder sted i de individuelle systemer.

Der er spørgsmål, som naturligt melder sig. Bryder Bohm teorien også med princippet om energiens bevarelse? Pladsen tillader ikke en grundig diskussion.

Men svaret er bekræftende. For det ensemble hvis tidsudvikling vi har undersøgt, kan følgende vises:

1. Ifølge et generelt teorem [3] p172, er energien bevaret på ensemble basis, d.v.s. ensemble middelværdien af energien er en bevægelseskonstant.

2. Hvis vi betragter det samlede udviklingsforløb for et individuelt system i ensemblet, er dets energi blevet forøget, hvis $|x_0| > \Delta x$, medens energien er aftaget, når $|x_0| < \Delta x$.

Dette træk, at et isoleret system af sig selv (fx) kan forøge sin energi, er i strid med universaliteten af princippet om energiens bevarelse, dvs. hævdelsen af, at dette princip gælder, ikke blot statistisk, men for hver eneste isolerede system i verden.

Konklusion

Det er velkendt, at Baron von Münchhausen engang i en trængt situation resolut greb fat i sine støvlestropper og hev sig selv op. Læseren forstår sikkert, hvorfor jeg kom til at tænke på dette eventyr. For ligesom Münchhausens succes beroede på at støvlestropperne venligst undlod at virke tilbage på de hænder, der greb fat i dem, så beror kvantepotentialets evne til at påføre elektronen en i princippet vilkårlig stor impuls uden selv at mærkes deraf på, at der i Bohm formalismen, i stedet for vekselvirkning, alene optræder en envejspåvirkning fra kvantepotential til elektron.

Figur 1. Navnet *bootstrap*, på dansk støvlestrop, optræder i én af historierne om den legendariske løgner Baron von Münchausen, idet han trækker sig selv op af en mose ved at hive i støvlestropperne. I den danske version hiver han sig selv op ved håret.

Det er velkendt, at Bohms indlæg var en afgørende inspirationskilde for Bell i den undersøgelse af skjulte variable, der førte frem til hans berømte teorem. Ville Bell have formuleret sit teorem uden Bohms indsats? Under alle omstændigheder er det min opfattelse, at Bohms arbejder har haft en frugtbar indflydelse på den kvantemekaniske grundlagsdiskussion. Men når det er sagt, er det også min opfattelse, at bruddet på de grundlæggende bevarelsessætninger gør, at Bohm teorien ikke fortsat med rimelighed kan holdes frem som en mulig formulering [1] eller fortolkning af kvantemekanikken.

Litteratur

[1] D.F. Styer et al (2002), Am. J. Phys, vol **70**, No 3, 288-297, March 2002.

[2] Max Jammer (1974), The philosophy of quantum mechanics, John Wiley and Sons.

[3] D. Bohm (1952), Phys. Rev. **85**, 166-179.

[4] D. Bohm (1952), Phys. Rev. **85**, 180-193.

Erland Brun Hansen var ansat ved Fysisk Laboratorium I, H.C. Ørsted Instituttet, fra 1963 til sin fratrædelse som lektor i 1997. Helt frem til sin pludselige død i november 2006 fortsatte Erland sit engagement i diskussionen omkring kvanteteoriens fysiske og interpretationsmæssige fortolkning. Denne artikel – et af de sidste af Erlands arbejder – er et led i denne diskussion. Se også mindeord i NBI-Avisen 24-11-2006: http://192.38.112.121/side138662.htm v. Henrik Smith og Betina Dam Sørensen samt mindeord i Politiken 24-11-2006 s.11 v. Peder Voetmann Christiansen.