

Topologisk kvantefeltteori - i krydsfeltet mellem matematik og fysik

Jørgen Ellegaard Andersen, Syddansk Universitet, og William Elbæk Mistegård, Institute for Science and Technology, Østirig

I denne artikel ser vi på samspillet mellem matematik og kvantefysik påbegyndt i 1980'erne med udgangspunkt i moderne gauge-teori. Vi fokuserer på den såkaldte topologiske kvantefeltteori. Vi illustrerer dermed, hvordan idéer fra fysikken leder til nye, dybe matematiske teorier, som på den ene side er interessante fra et rent matematisk perspektiv og på den anden side bidrager til at formalisere dele af fysikken, som før manglede et præcist grundlag.¹

Samspillet mellem kvantefysik og ren matematik, specielt geometri og topologi, er inde i en yderst frugtbar periode, påbegyndt i 1980'erne, som er til gavn for begge videnskaber. Denne artikels hovedpointer er:

1. Idéer fra kvantefeltteori og strengteori fra fysik har ledt til dybe matematiske resultater og teorier og forbundet adskillige matematiske discipliner; alt sammen overraskende fra et matematisk perspektiv.
2. Det matematiske studium af disse teorier leder så tilbage til fysikken med et præcist matematisk grundlag for idéer inden for fysikken, som før hvilede på et ikke-stringent grundlag.

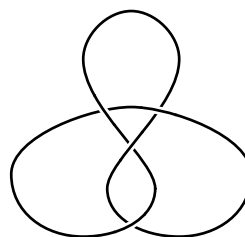
For den nysgerrige læser opremser vi her nogle af højdepunkterne: topologisk kvantefeltteori [1–4], Gromov-Witten-teori [5–7], spejlsymmetri [9, 10] og gauge/streng-dualitet [11]. Resultater inden for disse områder har flere gange ledt til den højeste pris inden for matematik, Fieldsmedaljen, og tilsammen udgør disse en fortløbende revolution i dynamikken mellem større og større dele af ren matematik involverende geometri, topologi, algebra og aspekter af talteori og så fysik.

Vi understreger, at påvirkningen imellem fysik og matematik er gensidig, og forskning inden for alle ovenstående discipliner involverer i dag både matematikere og fysikere. En af hovedårsagerne er, at nogle af de vigtigste idéer fra fysik faktisk er uden matematisk grundlag. Et yderst vigtigt eksempel herpå (punkt 2) er fysikerens brug af såkaldte *Feynman-sti-integraler* (path integrals) [12], som på trods af at mangle en matematisk definition (!) giver anledning til forudsigelser, som er verificeret med ekstremt høj præcision inden for standardmodellen for partikelfysik. En af de vigtigste opgaver for moderne matematik er at opnå et præcist grundlag for disse Feynman-sti-integraler. I det følgende ser vi nærmere på *topologisk kvantefeltteori (TQFT)*, som netop involverer disse Feynman-sti-integraler på central vis.

Knudeteori og topologisk kvantefeltteori

Dybest set handler topologi om kvalitative aspekter ved de overordnede former på geometriske figurer (kaldet

topologiske rum). En knude K er et topologisk objekt, som populært sagt kan siges at være opnået ved at tage en snor eller flere og binde enderne sammen. Se figur 1, hvor vi illustrerer en knude.



Figur 1. Knude.

Et centralt matematisk problem er klassificeringen af knuder; hvilke forskellige knuder findes der, og hvordan afgør vi, om to knuder er ens? Nedenfor beskriver vi Jones-polynomiet: en metode opfundet af matematikeren V. Jones til (delvist) at klassificere knuder, og som gav anledning til fysikeren E. Witten's vision om kvante-Chern-Simons-teori som en såkaldt topologisk kvantefeltteori. Vigtigheden af disse opdagelser bidrog til, at V. Jones og E. Witten hver især blev tildelt Fieldsmedaljen. E. Witten er til dato den eneste fysiker, som har opnået denne pris.

Jones-polynomiet i knudeteori

I sit studium af operatoralgebraer opdagede V. Jones i [13] en såkaldt knude-invariant, som til en knude K associerer et Laurent-polynomium med heltalskoefficienter, nu kaldet Jones-polynomiet

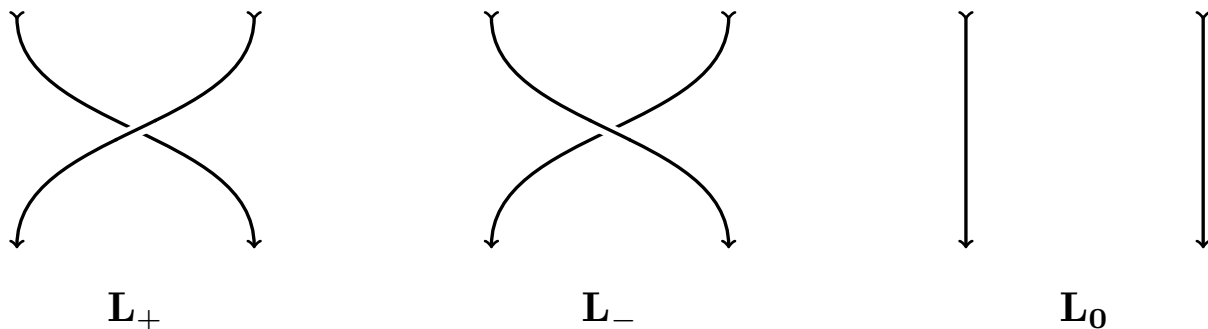
$$V(K, t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Jones-polynomiet opfylder den såkaldte Skein-relation (1). Lad L_+ , L_- og L_0 være tre knuder, som er identiske på nær i et lille område, hvor de adskiller sig som illustreret i figur 2.

Skein-relationen giver for en sådan trippel L_+ , L_- , L_0 følgende formel

$$t V(L_+, t) - t^{-1} V(L_-, t) = (t^2 - t^{-2}) V(L_0, t). \quad (1)$$

¹Forskerne bag denne artikel er delvist finansieret af ERC-Synergy-projektet, *Recursive and Exact New Quantum Theory (ReNewQuantum)*, som er støttet af det Europæiske Forskningsråd (ERC) som del af den Europæiske Unions Horizon 2020 forsknings- og innovationsprogram med bevillingsaftale nr. 810573



Figur 2. Skein-triplet.

Sammen med to andre egenskaber (som er naturlige fra et kvanteperspektiv), så er Jones-polynomiet bestemt af denne formel.

Jones-polynomiet blev af Jones defineret kombinatorisk ved at betragte et knude-diagram, som er en todimensionel projektion af knuden (som selv er et tredimensionelt objekt). Der var meget stor interesse omkring Jones' nye knude-polynomium, idet det var en langt bedre knudeinvariant, end man hidtil havde haft, og en af verdens top-matematikere, Sir Michael Atiyah, tog straks fat i denne invariant og fremhævede den som en af de større matematiske opdagelser i tiden. Det skal understreges, at Sir Michael Atiyah ikke var hr. hvem-som-helst. Han var omkring den tid en af verdens absolut førende matematikprofessorer – først ved Oxforduniversitet derefter ved Cambridgeuniversitet og samtidig leder af Trinity College i Cambridge og præsident for Royal Society i England, noget som kun han og Sir Isaac Newton nogensinde har opnået. Men Atiyah var ikke helt tilfreds med definitionen af Jones-polynomiet, idet den afhang af en 2D-projektion af knuden. Han udfordrede derfor verdens matematikere til at komme med en ny definition af Jones-polynomiet, som er intrinsisk – det vil sige, at den ikke benytter en 2D-projektion. Denne udfordring blev taget op af fysikeren E. Witten, som leverede et grandioست svar i form af visionen om kvante-Chern-Simons-teori som en topologisk kvantefeltteori!

Wittens kvante-Chern-Simons-teori

Chern-Simons-teori [14] er en af de vigtigste gauge-teorier i matematisk fysik. Teorien lader sig vanskeligt beskrive uden moderne matematisk terminologi, men vi fremhæver det strukturelt set vigtige. Vi har et virkningsfunktionale S , og ligesom i klassisk mekanik tilsiger Euler-Lagrange-ligningerne, at teoriens løsninger er givet ved ekstremaer for S , det vil sige løsninger x til $dS_x = 0$. Et godt eksempel på en gauge-teori, som formentligt er læseren bekendt, er Maxwells teori om elektromagnetisme.

I Chern-Simons-teori er virkningsfunktionale $S(\alpha)$ defineret for en $SU(n)$ -konnektion α på et principalt bundt P over en tre-mangfoldighed M_3 (et tredimensionelt topologisk rum) og Euler-Lagrange-ligningerne fortæller, at de klassiske løsninger i Chern-Simons-teori er givet ved de såkaldt flade konnektioner (dem, hvis krumning forsvinder)

Virkningsfunktionale:

$$S(\alpha) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_3} \text{tr} \left(\alpha d\alpha + \frac{2}{3} \alpha^3 \right),$$

Euler-Lagrange-ligningen:

$$dS_\alpha = 0 \iff d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0.$$

Feynman-sti-integraler og perturbationsteori

For at forklare Wittens idé om kvante-Chern-Simons, vil vi kort sige et par ord om Feynmans sti-integraler. Idéen om sti-integraler har oprindelse i dobbeltspalte-eksperimentet i kvantemekanik. Uden at gå i detaljer her, kan man forenklet sige, at Feynmans ide er, at en forventningsværdi for en proces P skal udregnes som gennemsnittet over alle tænkelige måder, hvorpå processen kan forløbe, vægtet med $\Psi_P \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$, hvor S er virkningsfunktionale, $\hbar$ er Plancks konstant og Ψ_P er overgangsamplituden. Eksempelvis kunne P være processen, at en partikel bevæger sig fra et sted A til et andet sted B , i dette eksempel er forventningsværdien givet ved et Feynman-sti-integral af alle mulige kurver γ fra A til B

$$\langle P \rangle = \int \Psi_P(\gamma) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right) \mathcal{D}\gamma \quad (2)$$

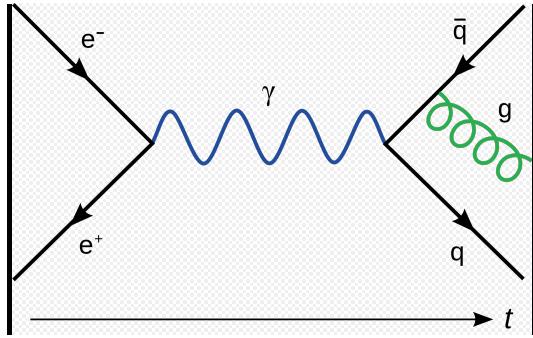
Problemet er, at det formelt er et integral over rummet af alle tænkelige måder, hvorpå processen P kan forløbe, og at det *ikke er muligt at integrere over dette rum!* Dette rum er uendeligt dimensionelt, og man kan matematisk bevise, at der ikke findes en passende integrationsteori i sådanne situationer!

Dog kan man alligevel benytte formel (2) heuristisk til at opnå forudsigelser, som vi vil diskutere en anelse mere nedenfor. Dette kaldes *perturbations-teori* og er hovedmetoden, hvormed man laver beregninger i kvantefeltteori. Heuristisk set beror dette på en såkaldt stationær fase-approksimation, og det giver en lokalisering til de stationære punkter for virkningsfunktionale S , svarende til de klassiske løsninger ($dS_x = 0$):

$$\langle P \rangle \sim \sum_{x: dS_x=0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \sum_{m=0}^{\infty} Z_x^{(m)} \hbar^m.$$

Faktisk er dette et af de stærkeste aspekter af Feynmans ide; foruden at levere ekstremt præcise forudsigelser, forklares sammenhængen imellem klassisk teori og

kvanteteori igennem perturbationsteori. Dette er i overensstemmelse med en af Bohrs centrale idéer for kvantemekanik, som vi vender tilbage til i afsnittet om Bohrs korrespondensprincip. Den interesserede læser, som gerne vil vide mere om Feynmans sti-integraler, kan konsultere monografien [15]. Koefficienterne $Z_x^{(m)}$ udregnes som summer af såkaldte *Feynman-diagrammer* eksemplificeret i figur 3. Et Feynman-diagram er en anskueliggørelse af en fysisk proces i grafisk form. Brugen af Feynman-diagrammer har været en stærk drivkraft i udviklingen af moderne knudeteori [16].



Figur 3. Feynman-diagram.

Wittens ide

Vi vender nu tilbage til Chern-Simons-teori og Witten. Lad K være en knude, lad $\mathcal{W}_K$ være Wilsons løkkeoperator (som vanskeligt lader sig beskrive i lægmands termer), lad $\mathcal{A}$ være rummet af konnektioner og lad $k \in \mathbb{N}$ være et positivt heltal (dvs. et tal i rækken 1, 2, 3, 4, 5, ...). Wittens geniale indsigt er, at Jones-polynomiet kan udregnes som forventningsværdien (3) for $\mathcal{W}_K$, og han argumenterede for dette ved at bevise, at det relevante Feynman-sti-integral opfyldte Skein-relationen (1)

$$\begin{aligned} & V(K, \exp(2\pi i/(k+n))) \\ &= \int_{\mathcal{A}} \exp(2\pi i k S(A)) \cdot \mathcal{W}_K(A) \mathcal{D}A \end{aligned} \quad (3)$$

Witten bemærkede, at man på denne vis giver en intrinsisk definition og samtidig generaliserer Jones-polynomiet til knuder i potentielt mere komplicerede tredimensionelle rum. Ydermere argumenterede han for, at hele teorien ville være et eksempel på en såkaldt topologisk kvantefeltteori. Det store problem var dog, at Feynman-sti-integralet i højresiden af (3) ikke umiddelbart kan tilskrives en matematisk mening, som ovenfor beskrevet. Dette problem blev der rådet bod på, med matematikerne N. Reshetikhin og V. Turaevs banebrydende arbejde, som vi kort vil beskrive nedenfor.

Reshetikhin og Turaevs topologiske kvantefeltteori

Selvom E. Wittens formler hvilede på et ufuldstændigt grundlag, lykkedes det føromtalt Sir M. Atiyah i [1] at aksiomatisere, hvilke egenskaber en såkaldt topologisk kvantefeltteori (TQFT) skulle opfylde. Ved hjælp af avanceret algebra (såkaldt repræsentationsteori

for kvantegrupper) lykkedes det N. Reshetikhin og V. Turaev i [2, 3] at definere en topologisk kvantefeltteori

$$\tau_k : \text{Cob}(3) \rightarrow \text{Vect},$$

og dette på stringent matematisk vis. Vi uddyber nu, hvad dette indebærer. Til en kompakt orienteret flade (et todimensionelt rum med et valg af "normal vektor") Σ associerer en TQFT et endeligt dimensionalt Hilbert-rum

$$\text{Hilbert rum:} \quad \Sigma \mapsto V_k(\Sigma).$$

I overensstemmelse med den probabilistiske natur af kvanteteori tilskrives den disjunkte forening af to flader tensorproduktet af vektorrummene, mens fladen med modsat orientering tilskrives det duale vektorrum og den tomme flade tilskrives den komplekse plan

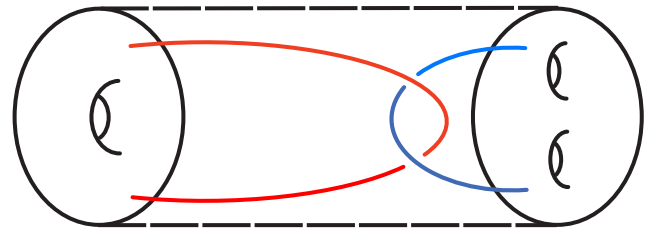
$$\text{Multiplikativitet:} \quad V_k(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V_k(\Sigma_1) \otimes V_k(\Sigma_2),$$

$$\text{Dualitet:} \quad V_k(-\Sigma) = V_k(\Sigma)^*,$$

$$\text{Normalisering:} \quad V_k(\emptyset) = \mathbb{C}.$$

Til en kompakt orienteret tre-mangfoldighed M_3 med rand $\partial M_3 = (-\Sigma) \sqcup \Sigma'$ som i figur 4, tildeler TQFT'en en lineær operator

$$\text{Lineær operator:} \quad \tau_k(M_3) : V_k(\Sigma) \rightarrow V_k(\Sigma').$$



Figur 4. En cobordisme $M_3 : \Sigma \rightarrow \Sigma'$.

Heuristisk set kan læseren opfatte M_3 som en model for rum-tiden, hvor rummet udvikles fra Σ til Σ' , dog i en verden, hvor der kun er to dimensioner som i planen og så tiden som den tredje dimension.

Kvanteinvarianten som Chern-Simons-partitions-funktion

I tilfældet, hvor vi har en orienteret lukket tre-mangfoldighed M_3 , dvs. uden rand $\partial M_3 = \emptyset$ (husk $\emptyset$ betegner den tomme mængde), tildeles tre-mangfoldigheden M_3 et komplekst tal kaldet *kvanteinvarianten*

$$\text{kvanteinvarianten:} \quad \tau_k(M_3) \in \mathbb{C}.$$

Det er bredt accepteret, at kvanteinvarianten er en stringent matematisk model for det Feynman-sti-integral, som i princippet skulle give en formel for partitionsfunktionen i Chern-Simons-teori. Med andre ord, hvis vi lader $\mathcal{A}(M_3)$ betegne rummet af konnektioner over M_3 , så betragter vi kvanteinvarianten som definition af Feynman-sti-integralet på højresiden i ligning (4)

$$\text{Definition:} \quad \tau_k(M_3) = \int_{\mathcal{A}(M_3)} \exp(2\pi i k S(\alpha)) \mathcal{D}\alpha. \quad (4)$$

Vigtigheden heraf kan ikke understreges nok; udover at kvanteinvarianten og hele TQFT'en er et uhyre interessant fænomen set fra et matematisk perspektiv, så giver den i et bredere perspektiv anledning til en dybere matematisk forståelse af kvantefeltteori og Feynmansti-integraler! Her har vi altså et eksempel på Punkt 2, hvor de nye input i matematik fra fysikken giver anledning til, at vi kan rigorisere fysikken.

Tilbageværende udfordringer

På trods af, at TQFT'en τ_k opfattes som en stringent matematisk model for kvante-Chern-Simons-teori, er der en række store udfordringer med at præcisere denne fortolkning, i og med at Reshetikhin og Turaev-konstruktionen går igennem kvantegrupper, som i udgangspunktet intet har med Chern-Simons-teori at gøre. Vi vil i næste afsnit, og i afsnittet om Bohrs korrespondensprincip, se nærmere på nogle af disse udfordringer, hvoraf nogle af dem er genstand for fortløbende arbejde.

Modular functors, konform feltteori og kvantisering

E. Wittens artikel gav også et forslag til, hvordan Hilbert-rummet til en flade Σ skulle realiseres og dette igennem:

1. kvantisering $V_k^{(\text{CS})}(\Sigma)$ af moduli rummet $\mathcal{M}_{\text{Flat}}(\Sigma)$ af fladekonnektioner og
2. konform feltteori $V_k^{(\text{CFT})}(\Sigma)$ for Σ .

Begge tilgange har en klar fysisk betydning, hvorimod konstruktionen igennem repræsentationsteori for kvantegrupper er mindre fysisk transparent jævnfør afsnittet ovenfor om *Tilbageværende udfordringer*. Det var derfor af stor betydning at bevise, at de 3 tilgange er identiske, hvilket blev bevist i [17–20]

$$V_k^{(\text{CS})}(\Sigma) \simeq V_k^{(\text{CFT})}(\Sigma) \simeq V_k(\Sigma). \quad (5)$$

Faktisk udgør $V_k(\Sigma)$ en såkaldt *modular functor*, med meget intrikate algebraiske egenskaber som vi beviser i artiklen [21]. I forbindelse med anvendelse inden for fysikken vil vi nævne, at modular functors har forbindelse til topologiske kvantecomputere jævnfør Freedmans artikler [22, 23].

Bohrs korrespondensprincip og Chern-Simons-teori

En af Niels Bohrs hovedteser er kendt som *Bohrs korrespondensprincip* og går ud på, at kvantemekanik kan approksimere klassisk mekanik i grænsen $\hbar \rightarrow 0$, hvor $\hbar$ er Plancks konstant. Dette kan formuleres matematisk præcist, og de relevante teknikker fra matematikken kaldes semi-klassisk analyse. Princippet er af afgørende betydning for forholdet mellem klassisk fysik og kvantefysik.

Den asymptotiske ekspansionsformodning

I overensstemmelse med Bohrs ide om semi-klassisk approksimation forventer man, at kvanteinvarianten $\tau_k(M_3)$ for høje værdier af $k(= 1/\hbar)$ er approksimeret af de flade konnektioner. Dette er præciseret i

Asymptotisk Ekspansionsformodningen [24], som siger, at for enhver konnektion α i moduli rummet af flade konnektioner $\mathcal{M}_{\text{Flat}}(M_3)$ findes et rationelt tal $d_\alpha \in \mathbb{Q}$ og en potensrække i $1/k$

$$Z_\alpha(1/k) = Z_\alpha^{(0)} + Z_\alpha^{(1)} k^{-1} + Z_\alpha^{(2)} k^{-2} + Z_\alpha^{(3)} k^{-3} + \dots, \quad (6)$$

som tilsammen giver ekspansionen (7) af kvanteinvarianten

$$\tau_k(M_3) \sim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_{\text{Flat}}(M_3)} \exp(2\pi i k S(\alpha)) k^{d_\alpha} Z_\alpha(1/k). \quad (7)$$

Som nævnt er dette af afgørende betydning for sammenhængen mellem klassisk fysik og kvantefysik, og vi beviser formodningen for visse tre-mangfoldigheder i artiklerne [25, 26].

Perturbationsteori og resurgence

Rækkerne Z_α i (6) er de såkaldte perturbative rækker, som kan udregnes ved hjælp af Feynman-diagrammer. Det er denne metode, som er enormt succesfuld inden for kvantefeltteori. En stor teoretisk udfordring her er, at disse rækker næsten altid *divergerer*, hvilket forenklet sagt betyder, at summen ikke kan tilskrives et tal (men må betragtes formelt).

Vi er i færd med (i samspil med en lang række andre matematikere og fysikere verden over) at videreudvikle en teori kaldet *resurgence* [27], som tillader os at tilskrive tal til disse perturbationsrækker gennem såkaldt resummation. Resurgence tager udgangspunkt i formelen (2), og idéen er at tillade såkaldte *komplekse felter* $\alpha + i\beta$, og udvide virkningsfunktionalet S holomorft til disse (hvorpå det kan antage komplekse værdier!). Den matematisk interesserede læser, som gerne vil vide mere om resurgence, kan konsultere vores artikel [26] og anden-forfatterens afhandling [28].

Afrunding

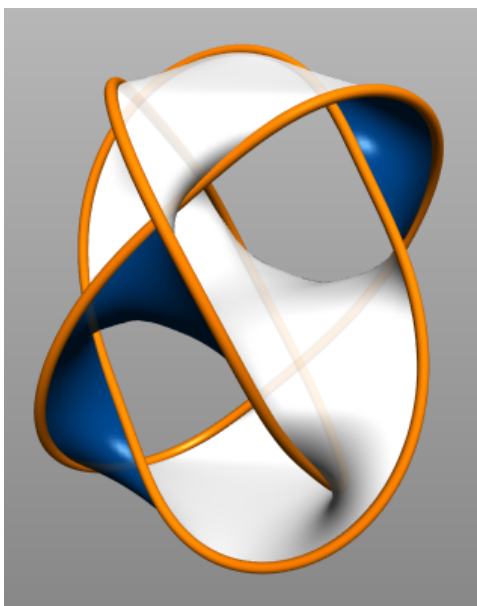
Vi har i denne artikel set, hvordan Wittens fysiske fortolkning af Jones-polynomiet som en forventningsværdi i Chern-Simons-teori gav anledning til den matematiske konstruktion af en TQFT af Reshetikhin og Turaev, og hvordan forskning inden for denne TQFT giver nye indsigter i naturen af Feynmansti-integraler. Forhåbentligt vil vores arbejde med resurgence kaste nyt lys over perturbationsteori, og derved give endnu mere tilbage til fysikken.

Samspillet mellem matematik og fysik (især mellem geometri og topologi på den matematiske side, og kvantefeltteori og strengteori på den fysiske side) er som før nævnt en fortløbende revolution, hvis ramifikationer til stadighed ikke er fuldt ud forstået inden for nogen af de to videnskaber. Vi afslutter denne artikel med kort at belyse endnu et eksempel på dette samspil, som er på sit begyndende stadie; nemlig gauge/string-dualitet som på fysikkens side forbinder kvantefeltteori med strengteori, og på matematikkens side forbinder (ganske overraskende) TQFT og knudeteori med Gromov-Witten-teori.

Gauge/string-duality og TQFT/Gromov-Witten-teori

En dualitet i fysik er en forbindelse mellem to tilsyneladende forskellige systemer. Set fra et matematisk synspunkt, kan man betragte en dualitet som en magisk portal, der forbinder to forskellige verdener, der i udgangspunktet ikke ser ud til at have noget med hinanden at gøre. Spejlsymmetri [9, 10] er et eksempel på dualitet. E. Witten er fortalende for (se [29]), at dualiteter kommer til at spille en afgørende rolle i fremtidens fysik, og dette har også forbindelse til Chern-Simons-teori og TQFT, som vi nu vil beskrive.

I strengteori spiller Riemann-flader en central rolle som såkaldte verdensflader (af engelsk: *world sheets*), der er en todimensionel udvidelse af begrebet verdenslinjer, for propagerende strenge. Analogt med Chern-Simons-teori og TQFT kan visse strengteorier formuleres matematisk præcist. De centrale matematiske størrelser er de såkaldte Gromov-Witten-(GW)-invarianter. Disse GW-invarianter kan ses som integraler over modulrummet $\mathcal{M}$ af Riemann-flader indlejret i en højere dimensionel rumtid. Givet en matematisk knude K , findes der en såkaldt Seifert-Riemann-flade for K , som er en Riemann-flade S med rand $\partial S = K$ (figur 5).



Figur 5. En Seifertflade.

Der er nu stærk evidens for [30, 31], at der findes en såkaldt gauge/string-duality, der forbinder Gromov-Witten-teori for Riemann-flader S med rand-betingelse $\partial S = K$ til Jones-Witten-teori for knuden K ! Dette er en helt ny retning inden for matematik, som skaber overraskende forbindelser mellem algebraisk geometri og topologi!

Litteratur

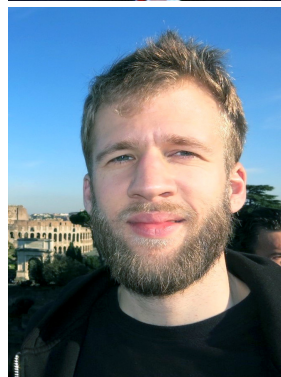
- [1] M. F. Atiyah (1988) Topological quantum field theory. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, bind **68**, side 175–186.
- [2] N. Reshetikhin og V. G. Turaev (1991) Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent Math.*, bind **103**, side 547–597.
- [3] N. Y. Reshetikhin og V. G. Turaev (1990) Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, bind **127**, side 1–26.
- [4] E. Witten (1989) Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, bind **121**, side 351–399.
- [5] M. Gromov (1985) Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, bind **82**, side 307–347.
- [6] E. Witten (1998) Topological sigma models. *Comm. Math. Phys.*, bind **118**, side 411–449.
- [7] E. Witten (1991) Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. In *Surveys in Differential Geometry (Cambridge, MA, 1990)*, side 243–310. Lehigh Univ., Bethlehem, PA.
- [8] S. K. Donaldson og R. P. Thomas (1998) Gauge theory in higher dimensions. In *The Geometric Universe (Oxford, 1996)*, side 31–47, Oxford Univ. Press, Oxford.
- [9] M. Kontsevich (1995) Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, side 120–139, Birkhäuser, Basel.
- [10] A. Strominger, S.-T. Yau og E. Zaslow (1996) Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Physics B*, bind **479**, side 243–259.
- [11] H. Ooguri og C. Vafa (2000) Knot invariants and topological strings. *Nuclear Phys. B*, bind **577**, side 419–438.
- [12] R. P. Feynman og A. R. Hibbs (2020) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, rev. udg. med forord af D. F. Styer.
- [13] V. F. R. Jones (1985) A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, bind **12**, side 103–111.
- [14] D. S. Freed (1995) Classical Chern-Simons Theory, 1. *Advances in Mathematics*, bind **113**, side 237–303.
- [15] G. W. Johnson og M. L. Lapidus (2000) *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. Oxford Science Publications.
- [16] L. H. Kauffman (1991) *Knots and Physics*, bind 1 i *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.
- [17] J. E. Andersen og K. Ueno (2007) Abelian conformal field theory and determinant bundles. *Int. J. Math.*, bind **18**, side 919–993.
- [18] J. E. Andersen og K. Ueno (2007) Geometric construction of modular functors from conformal field theory. *J. Knot Theory Ramifications*, bind **16**, side 127–202.
- [19] J. E. Andersen og K. Ueno (2012) Modular functors are determined by their genus zero data. *Quantum Topol.*, bind **3**, side 255–291.
- [20] J. E. Andersen og K. Ueno (2015) Construction of the Witten–Reshetikhin–Turaev TQFT from conformal field theory. *Invent. math.*, bind **201**, side 519–559.
- [21] J. E. Andersen og W. Petersen (2017) Construction of modular functors from modular tensor categories. I *Quantum Geometry of Moduli Spaces with Applications to TQFT and RNA Folding*, bind 25 af *Trav. Math.*, side 147–211. Fac. Sci. Technol. Commun. Univ. Luxemb., Luxembourg.
- [22] M. H. Freedman, A. Kitaev og Z. Wang (2002) Simulation of topological field theories by quantum computers. *Comm. Math. Phys.*, bind **227**, side 587–603.

- [23] M. H. Freedman, A. Kitaev, M. J. Larsen og Z. Wang (2003) Topological quantum computation. I *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, bind **40**, side 31–38. Mathematical challenges of the 21st century (Los Angeles, CA, 2000).
- [24] J. E. Andersen (2013) The Witten–Reshetikhin–Turaev invariants of finite order mapping tori I. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, nr. 681, side 1–38.
- [25] J. E. Andersen og W. E. Petersen (2019) Asymptotic expansions of the Witten–Reshetikhin–Turaev invariants of mapping tori I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, bind **372**, side 5713–5745.
- [26] J. E. Andersen og W. E. Mistegård (2020). Resurgence Analysis of Quantum Invariants of Seifert Fibered Homology Spheres. *arXiv:1811.05376 [math]*.
- [27] A. Behtash m.fl. (2017) Toward Picard–Lefschetz theory of path integrals, complex saddles and resurgence. *Ann. Math. Sci. Appl.*, bind **2**, side 95–212.
- [28] W. E. Mistegård (2019) *Quantum Invariants and Chern-Simons Theory*. Ph.d.-afhandling, Aarhus Universitet.
- [29] N. Wolchover (2017) A Physicist’s Physicist Ponders the Nature of Reality www.quantamagazine.org/edward-witten-ponders-the-nature-of-reality-20171128/.
- [30] A. Brini, B. Eynard og M. Mariño (2012) Torus knots and mirror symmetry. *Ann. Henri Poincaré*, bind **13**, side 1873–1910.

- [31] T. Ekholm og V. Shende (2019) Skeins on Branes. *arXiv:1901.08027 [hep-th]*.



Jørgen Ellegaard Andersen er professor, leder af Center for Kvantematematik samt Chair ved Danish Institute for Advanced Studies ved SDU. Hans forskningsområde ligger i krydsfeltet mellem geometri/topologi og kvantefeltteori.



William Elbæk Mistegård er ph.d. i matematik fra Aarhus universitet (vejledt af Jørgen Ellegaard Andersen), og arbejder nu som postdoc i matematik på Institute for Science and Technology Austria. Han forsker i topologisk kvantefeltteori og geometri/topologi.

Ørstedbøger og -temahæfter



SNU har i år udgivet bogen “Hans Christian Ørsted – the Unity of Spirit and Nature”. Bogen er på engelsk og det ene af i alt 12 signaturprojekter, som via det nationale formidlingsinitiativ “HCØ2020” fejrede 200-året for Ørsteds opdagelse af elektromagnetismen.

Jubilæumsbogen er smukt illustreret og indeholder en stor samling af artikler, der tidligere har været udgivet i Kvant, bl.a. alle artiklerne om Ørsted fra Kvants temanummer i december 2019, men der er også enkelte nye artikler.

Bogen er på 152 sider og koster 179 kr. Den kan bestilles online hos Polyteknisk Boghandel på www.polyteknisk.dk/hco2020, og kan købes af medlemmer af SNU til favørpris ved SNU's foredrag.

Bogen er redigeret af Jens Olaf Pepke Pedersen, Cecilie M. K. Pedersen og Dorte Olesen, og udgivelsen

er støttet af Augustinus Fonden, Dronning Margrethe og Prins Henriks Fond samt Grosserer George Jorck og hustru Emma Jorck's Fond.

Kvant sælger også enkeltteksemplarer af temanummeret om Ørsted og opdagelsen af elektromagnetismen (Kvant nr. 4, december 2019) for 25 kr./stk, mens temanummeret om Ørsted og enhedsteorier i fysikken (Kvant nr. 2, juni 2020) koster 50 kr./stk. Hæfterne kan bestilles på kvant@kvant.dk, og de sendes for 25 kr. uanset antal. Kvant nr. 4, december 2018 med historien om elektromagnetismen af Laila Zwisler kan fås for 25 kr./stk.

Det er også muligt at købe en samlepakke med de seneste tre årgange af Kvant for i alt 300 kr. inklusive forsendelse.

Har du ikke modtaget Kvant?

Kvant omdeles med Bladkompagniet. Såfremt du ikke har modtaget bladet, beder vi dig i første omgang om at rette henvendelse til Bladkompagniets kundeservice på telefon 44517570 hverdage mellem kl. 8 og kl. 15. Bladkompagniet kan efterlevere et erstatningseksemplar. Redaktionen vil imidlertid også gerne orienteres på en mail til kvant@kvant.dk, så vi kan tage sagen op, hvis bladet udebliver gentagne gange.