

I Have Calculated It

Poul G. Hjorth, Institut for Matematik og Computer Science, DTU

If religion is a system of beliefs containing unprovable truths, then not only is mathematics a religion, it is the only religion which is able to prove that it is one.

– John Barrow (*Pi in the Sky* [1])

En april dag i året 1684 rejste den unge engelske astronom Edmond Halley fra London til Cambridge for at tale med matematikeren Isaac Newton om himmellegemers bevægelser.

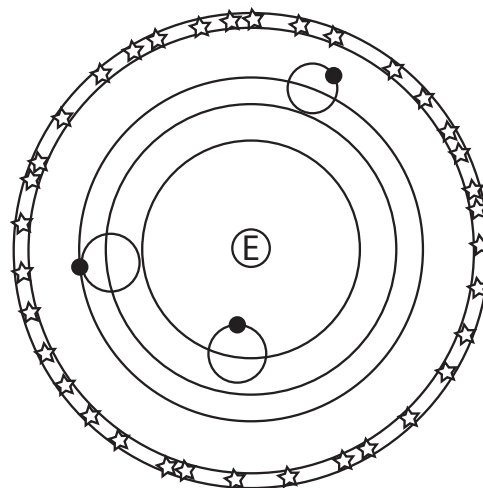
Newton var på det tidspunkt Lucasian Professor ved universitetet i Cambridge, og han var interesseret i mange forskellige emner. Som ung universitetsprofessor havde han i midten af 1660'erne stået bag et antal nyopdagelser i matematik, dels om uendelige rækker, dels om systematiske beskrivelser af rater og ændringer, beskrevet ved hjælp af grænseværdibetragtninger; teorien om *fluxoner*, som vi i dag kalder differentialregningen. Både differential- og integralregningens hovedsætning og mange andre dybe resultater blev påvist af Newton i denne periode.

Newtons interesser spændte uhyre vidt, også til emner vi i dag ville synes var ejendommelige sysler for en matematiker, såsom alkymi og teologi, herunder bibelkronologi, som Newton brugte årevis på. Da Halley kom på besøg, havde Newton faktisk i en periode beskæftiget sig med helt andre ting end med differentialregning og legemers bevægelse [4]. Men med Halleys besøg genvaktes Newtons interesse for emnet. Newton havde i sine studier brugt begrebet *kraft* som noget, der var i stand til at ændre og dirigere den bevægelsesmængde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, som et massepunkt med hastighed $\mathbf{v}$ har.

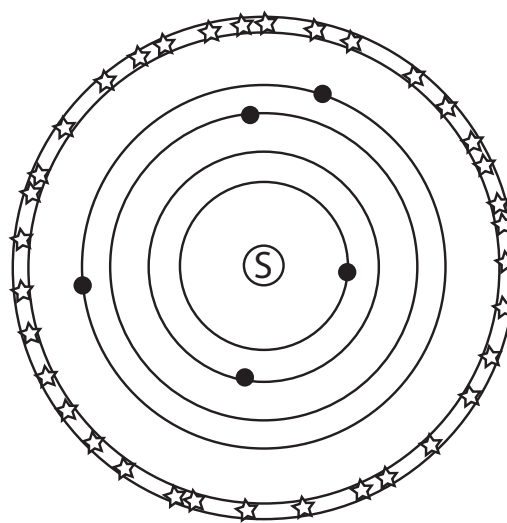
I de 150 år, der lå før Newtons gennembrud, var beskrivelsen af bevægelserne i solsystemet undergået ganske store ændringer. Frem til miden af 1500-tallet byggede beskrivelsen af stjernehimmelen og planeterens bevægelse på oldtidens geocentriske model med Jorden i centrum og planeterne anbragt på mærkelige, uafhængigt drejende cirkler (de såkaldte epicykler), der til en vis grad gav en forklaring på planeterens bevægelse på baggrund af fixstjernerne. Se figur 1.

Den kopernikanske (heliocentriske) model for solsystemet fra 1543 var den første radikale revision af denne model, og modellen var umiddelbart kontroversiel, idet den fjernede Jorden som planetsystemets centrum, men den slående, matematiske forenkling førte alligevel til accept [7], hos blandt andre Kepler (1571–1630) og Galilei (1564–1642). Modellen savnede mere præcise data. Det blev leveret i enestående grad af den danske astronom Tycho Brahe (1546–1601), under hvis ledelse nøjagtige observationer af stjerne- og planetpositioner gennem næsten 20 år blev produceret.

Kepler, der var ansat hos Tycho Brahe, overtog i 1601 det enorme datamateriale og underkastede det en grundig matematisk analyse.



Geocentrisk



Heliocentrisk

Figur 1. Oldtidens geocentriske, og renæssancens heliocentriske model for planeterens baner. I den geocentriske model er Jorden (E) i centrum, Solen og planeterne går rundt i baner, hvor planeterne (i figuren stærkt simplificeret) befinder sig på cirkler, der drejer om et punkt, der selv drejer om Jorden. I den heliocentriske model er Solen (S) i centrum, og planeterne bevæger sig alle rundt om Solen.

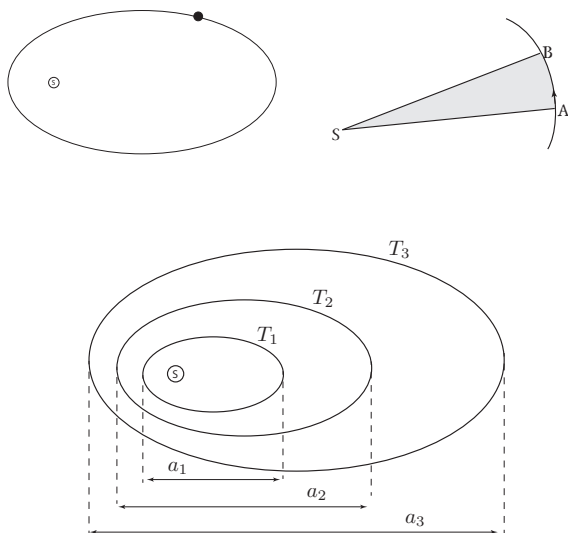
Det lykkedes Kepler at destillere informationen i årtiers observationer af planeterne (især af Mars) til tre principper for planetbevægelse, de såkaldte Keplers love:

- (1) Ellipseloven: Planeterne bevæger sig i elliptiske baner, hvor Solen befinder sig i det ene brændpunkt.
- (2) Arealloven: Bevægelsen langs ellipsen er således, at radiusvektor hver tidsenhed "overstryger" et konstant areal.
- (3) Periodeloven: Forholdet a^3/T^2 mellem storaksens længde a i tredje potens og omløbstiden T i anden potens har samme værdi for alle planeterne.



Figur 2. Tycho Brahe (t.v.) og Johannes Kepler (t.h.).

Keplers beskrivelser af planetbevægelserne er formuleret matematisk i termer af geometri (ellipseloven), algebra (periodeloven), og så en lov (arealloven), hvori der faktisk indgår en rate. I denne sidste sammenhæng ser vi en kim til en differentialregningsbeskrivelse, men Kepler folder den ikke yderligere ud.



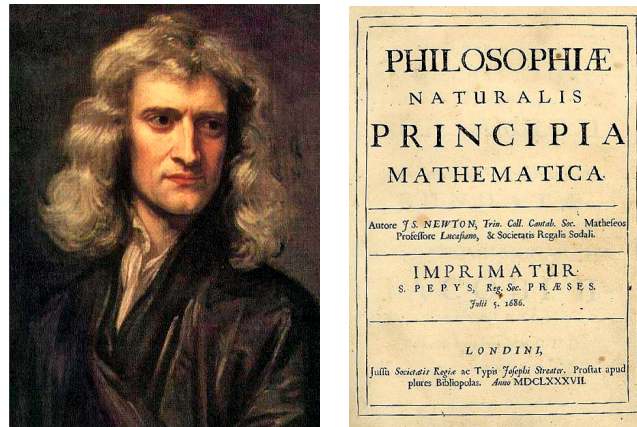
Figur 3. Keplers tre love.

Keplers love er rent beskrivende og indeholder ikke nogen overvejelser om årsager til, at bevægelserne bliver på den måde, som de gør, og slet ikke, at alle tre resultater kunne være manifestationer af et og samme fænomen. Keplers eneste gæt på, hvad der mon kunne formå planeterne, ikke mindst den mægtige jordklode,

¹ Vi kan trække på smilebåndet over denne måske naive holdning, men dels var Kepler mere interesseret i virkninger end årsager, dels skal vi ikke nødvendigvis tro, at vi har fundet den ultimative årsagsforklaring. Vi har erstattet englevinger med kraftvektorer (eller med metrikker i en rumtid), men det kan jo også være, at en fremtids fysikere vil trække på smilebåndet over disse metaforer.

til at opføre sig på denne sindrige måde, var, at det måtte være engle, der med deres store vinger dirigerede solsystemets legemer netop således, at deres baner opfyldte skaberens bestemmelser¹.

René Descartes bog *Discours de la Méthode* fra 1639 indeholdt en teori om en slags kosmiske strømhvirvler som årsag til himmellegemers bevægelser. Sådan stod sagerne hen forbi midten af 1600-tallet.



Figur 4. Isaac Newton og Principia.

Ved sit besøg i Cambridge foråret 1684 var Edmond Halley som astronom specielt interesseret i en forklaring i termer af kræfter af den observerede bevægelse af planeter og kometer, og spurgte Newton om den form for kræfter, der, rettet mod et fast centrum, afhang af den reciprokke kvadratafstand til tiltrækningspunktet. Vi har ingen førstehandsberetning af deres samtale den forårsdag, men samtaleens indhold er gengivet af Abraham de Moivre (1667–1754) i et notat dateret november 1727 og senere oversat til engelsk [3]:

In 1684 Dr. Halley came to visit [Newton] at Cambridge, after they had been some time together, the Dr. asked him what he thought the Curve would be described by the planets supposing the force of attraction towards the Sun to be reciprocal to the square of their distance from it. Sir Isaac replied immediately that it would be an Ellipsis, the Doctor struck with joy and amazement asked him how he knew it. Why saith he, I have calculated it. [...]

Newton svarer: *I have calculated it*. Fra den simple relation (som vi i dag kalder Newtons 2. lov)

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (1)$$

og gravitationsloven

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{||\mathbf{r}||^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

har Newton *udledt* de tre Keplerlove, specielt ellipseloven for de periodiske baner. Faktisk er denne udledning så generel, at den også viser, at parabolske og hyperbolske baner (som er ubegrænsede bevægelser med

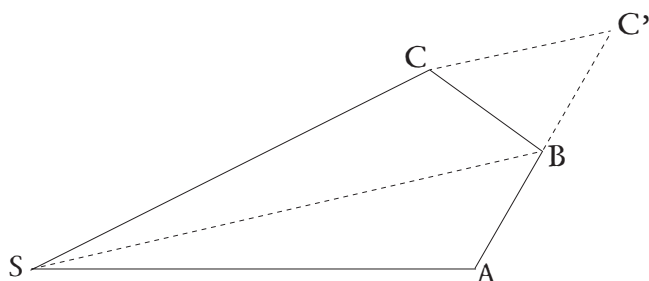
ikke-negativ energi) også er en naturlig konsekvens af loven om massetiltrækning [5]. Denne påvisning betragtes med rette som et af den teoretiske fysiks mesterstykker.

Halley indså, at Newtons indsigt og de meget almentgyldige teknikker måtte bringes til et større publikum, og han overtalte Newton til at producere, hvad der senere er blevet kaldt den mest indflydelsesrige naturvidenskabelige lærebog nogensinde: Naturfilosofiens Matematiske Principper (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*), kendt som blot *Principia*.

I *Principia* bruger matematikeren Newton sin nyudviklede differentialregning, blandt mange andre ting anvendt på fysikproblemet om punktmassers bevægelse omkring et fast tiltrækningspunkt i en plan. Figur 5 illustrerer Newtons metode med først at vise egenskaber ved et stykkevis lineært problem, hvor kraften virker i små stød. Imellem disse stød bevæger masserne sig jævnt og retlinjet. Hver diskret kraftpåvirkning fører til en ændring af retning (men ikke størrelse, da der ikke udføres noget arbejde på partiklen), dvs. bare en drejning af hastigheden, og dermed af impulsen.

$$p_{\text{efter}} - p_{\text{før}} = F\Delta t \quad (3)$$

Newton undersøger situationen og lader så mellemrummet Δt mellem kraftpåvirkningerne gå mod nul, således at situationen nærmer sig en kontinuert kraftpåvirkning. Disse argumenter bruges også i dag ved analysen af kurver og kræfter. Figur 5 er Newtons argument for, at alle centralbevægelser må opfylde Keplers 2. lov om arealhastigheden.



Figur 5. Her ser man, hvordan Newton viser, at alle centralkræfter vil give bevægelser, som opfylder Keplers areallov. En masse starter i punktet A og bevæger sig i et lille tidsrum Δt med jævn hastighed frem til punktet B. Hvis massen fik lov til at fortsætte, ville den efter endnu et tidsrum Δt nå frem til punktet C'. Imidlertid får massen i punktet B en pludselig påvirkning (engelsk: *impulse*), der får den til at skifte retning, men ikke hastighed. Efter tidsrummet Δt befinder massen sig i nu punktet C, hvor $BC=AB$. Men da vil trekkanterne SAB og SBC have samme areal, så lige store arealer er overstrøget i lige store tidsrum. Når vi lader Δt gå mod nul, vil trekkanterne blive mere og mere spidse, og stykkerne AB og BC vil blive til en kurve, nemlig banekurven.

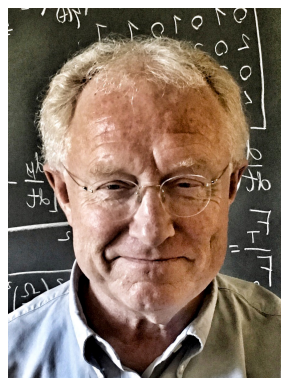
Newton forankrer (sikkert med velberådet hu) sine argumenter i solid matematik, nemlig Euklids plan-

geometri [2]. Kun grænseovergangene repræsenterer det nye matematiske sprog. De nye ideer var så klare og anvendelige, at *Principias* udbredelse medførte et væld af gennembrud og anvendelser, både inden for naturvidenskab og inden for matematikken selv. Og selvfølgelig også genererede nye spørgsmål, der nu blev stillet i differentialregningens sprog.

Der er mange meninger om “matematikens overraskende effektivitet” [8]. Hvis man ser *Principia* som en lærebog, der ud af ingenting dukkede op, og med sin fremkomst åbnede for en kæmpestor verden af fysiske modeller, der nu pludselig fungerede og kunne bruges i praksis, så kan det måske synes sådan. Men ligesom Keplers love er et destillat af et enormt observationsmateriale, så er *Principia* også et destillat af en erfaring, der faktisk selv udspringer fra det fysiske univers. I det lys er det måske en anelse mindre mirakuløst, at matematikken er så god til at beskrive fysiske fænomener. Det er næppe hele forklaringen, men efter denne forfatters mening en stor del af den. Matematikken er et sprog, som vi bruger til at forstå naturen med, men vi har lært det af naturen selv.

Litteratur

- [1] J.D. Barrow (1994) *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being*. Oxford University Press.
- [2] Euklid (2020) *Elementer* (dansk oversættelse). Gyl-dendal.
- [3] S. Hollingdale (2009) *Makers of Mathematics*, Dover Books.
- [4] M. White (1998) *Isaac Newton – The Last Sorcerer*, Penguin Books.
- [5] J.M. Knudsen og P.G. Hjorth (2002) *Elements of Newtonian Mechanics*. 3rd ed., Springer Advanced Texts in Physics.
- [6] I. Newton (2016) *Principia*, CreateSpace Independent Publishing Platform, ISBN 9781532949685.
- [7] T.S. Kuhn (1974) *The Copernican Revolution*. Harvard University Press.
- [8] E. P. Wigner (1960) The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, bind 13, side 1–14.



Poul G. Hjorth er ph.d. og lektor i anvendt matematik ved Institut for Matematik og Computer Science, DTU.