Casimireffekten – kraften af ingenting

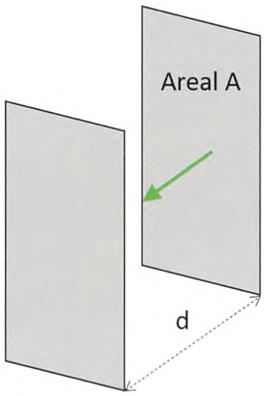
Bernhard Lind Schistad, Midtbyens Gymnasium, Mercantec

Når to elektrisk ledende plader anbringes tæt på hinanden i vakuum, vil der opstå en tiltrækkende kraft mellem dem. Denne effekt, som kaldes Casimireffekten, skyldes tilstedeværelsen af virtuelle partikler i vakuum, kaldet vakuum-polarisation. Dette er en makroskopisk effekt, som kan måles, men som skyldes rent kvantemekaniske mekanismer. For nylig er det også målt, at Casimireffekten kan skabe et drejningsmoment mellem asymmetriske objekter. Der ser også ud til, at der findes en sammenhæng mellem Caimireffekten og den vakuumenergi, som får universets udvidelse til at accelerere.

I 1948 offentliggjorde den hollandske fysiker Hendrik B. Casimir en artikel, som påviste, at to elektrisk ledende plader, der placeres tæt på hinanden i vakuum, vil blive tiltrukket af en gensidig kraft som skyldes vakuumpolarisation [1]. Denne kraft er proportional med arealet af pladerne og omvendt proportional med afstanden i fjerde potens. Casimir fandt at kraften er givet ved formelen:

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{A}{d^4}, \tag{1}$$

hvor A er pladernes areal, d er afstanden, c er lyshastigheden og $\hbar$ er Plancks konstant divideret med 2π.



Figur 1. Casimirkraften.

For makroskopiske systemer er denne kraft ikke målbar, men når vi kommer ned i mikroskopiske systemer, fx i mekaniske mikrochips, er kraften reel og observerbar.

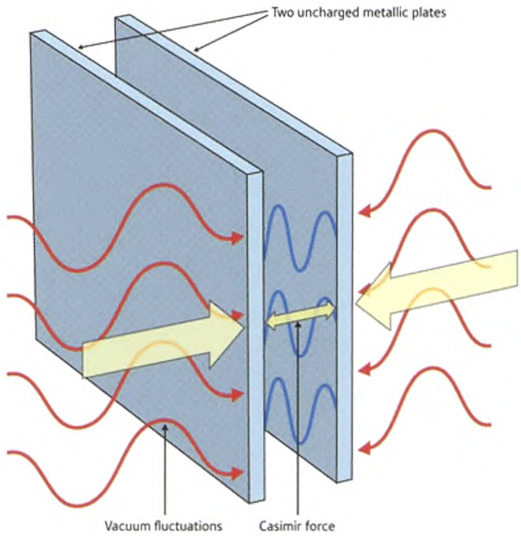
Meget forenklet er ophavet til denne kraft virtuelle partikler, som kortvarigt opstår i vakuum. Fordi afstanden mellem pladerne er lille, begrænser det antallet af vakuumtilstande, der kan eksistere mellem pladerne. Uden for pladerne kan der eksistere virtuelle partikler med alle mulige bølgelængder mellem nul og uendelig, mens den længste bølgelængde mellem pladerne er begrænset til afstanden mellem pladerne. Dette medfører at "trykket" af virtuelle partikler er større på ydersiden af pladerne, og dette vil give en kraft som presser pladerne sammen (se figur 2)

Vakuumfluktuationer

En karakteristisk egenskab ved kvantemekaniske systemer er, at de har en nulpunktsenergi. Dette skyldes, at de adlyder Heisenbergs ubestemthedsrelation, som siger at usikkerheden på en partikels energi og tid skal opfylde uligheden:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2. \tag{2}$$

Dette medfører, at partiklen ikke kan have energi lig med nul og dermed også, at et lille rumfang ikke kan have energi lig med nul.



Figur 2. Vakuumfluktuationer.

I kvantefeltteori er rummet fyldt af et kvantefelt for hver type elementarpartikel. Da Heisenbergs ubestemthedsrelation skal være opfyldt, kan ikke alle disse felter være nul, når vi observerer over et kort tidsrum. Så vil hvert enkelt felt have en nulpunktsenergi svarende til længden af tidsrummet. Det vi sige, at selv om vi har absolut vakuum, vil der kortvarigt opstå virtuelle partikler. Dette giver ophav til vakuumenergi.

Casimireffekten opstår, når vi har to elektrisk ledende plader tæt på hinanden i vakuum. Da det elektriske felt inde i en leder er nul, betyder det, at der kun kan eksistere tilstande med et helt antal halve bølgelængder mellem pladerne. Det vil sige, at bølgelængder, der er længere end to gange afstanden, ikke kan eksistere i mellemrummet. Udenfor pladerne er der ingen begrænsning på bølgelængderne, og vakuumenergitætheden vil derfor være større udenfor pladerne. Dette er ophavet til Casimirkraften, som gør at pladerne tiltrækker hinanden.

Casimirkraften

Normalt udledes formelen for Casimirkraften (1) ved at finde bølgefunktionen for elektromagnetiske bølger mellem pladerne og bestemme trykforskellen mellem indersiden og ydersiden af pladerne. Denne udregning kan være ret kompliceret, men Peter W. Milloni har fundet en alternativ og meget simpel metode til at beregne Casimirkraften [2] og [3]. Vi vil her gennemgå hans udledning.

Vi ved at en simpel harmonisk oscillator i én dimension, har energiniveauer givet ved formelen:

$$E_n = (2n+1) \cdot \frac{\hbar}{2}\omega. \tag{3}$$

Her er $n = 0, 1, 2, \ldots$ antallet af halve bølger mellem væggene, og ω er vinkelhastigheden. Dette giver en nulpunktsenergi ($n = 0$) på:

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}\omega. \tag{4}$$

Dette er nulpunktsenergien for en dipoloscillation i én dimension. For at finde nulpunktsenergien per volumenhed i tre dimensioner må vi multiplicere dette med antallet af vibrationstilstande per volumenenhed.

For en dipoloscillator er antal vibrationstilstande i intervallet $[\omega, \omega + d\omega]$ givet ved [2]:

$$\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{5}$$

Vi multiplicerer med nulpunktsenergien for hver vibrationstilstand (3) og får energidensiteten:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega. \tag{6}$$

For at finde den totale vakuumenergi mellem vore to plader, må vi multiplicere med rumfanget og integrere over alle tilladte værdier for ω, svarende til en halvbølgelængde større end afstanden mellem pladerne. Hvis afstanden mellem pladerne er d og arealet er A, er nulpunktsenergien givet ved:

$$E = Ad \cdot \int_{\frac{\pi c\beta}{d}}^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega. \tag{7}$$

Her har vi indført en dimensionsfaktor β i den nedre grænse i integralet for at kompensere for, at vi kun regner i én dimension ($\beta \approx 1/3$) [3].

Vi laver nu et trick ved at dele integralet i to intervaller:

$$E = Ad \cdot \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega - Ad \cdot \int_0^{\frac{\pi c\beta}{d}} \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega. \tag{8}$$

Det første integrale er kun proportionalt med rumfanget, og er uafhængig af geometrien. Det siger intet om afstanden mellem pladerne. Det kan derfor ikke give ophav til nogen kraft. Vi vil derfor ignorere det og koncentrere os om vakuumenergien fra det andet integrale:

$$\begin{aligned} V(d) &= -Ad \cdot \int_0^{\frac{\pi c\beta}{d}} \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega && (9)\\ &= -Ad \cdot \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3}\left(\frac{\pi c\beta}{d}\right)^4 && (10)\\ &= -A\frac{\hbar\pi^2 c\beta^4}{8d^3} && (11) \end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme kraften ved at differentiere energien med hensyn til d (arbejde = kraft $\times$ vej):

$$F = \frac{d}{dd}V(d) = A\frac{3\hbar\pi^2 c\beta^4}{8d^4}. \tag{12}$$

Da kraften virker på ydersiden af pladerne, ses denne formel tit med negativt fortegn.

Den nøjagtige værdi for dimensionsfaktoren β er 0,3247 [3]. Vi indsætter β = 0,3247 (tre dimensioner) og får Casimirs formel for kraften:

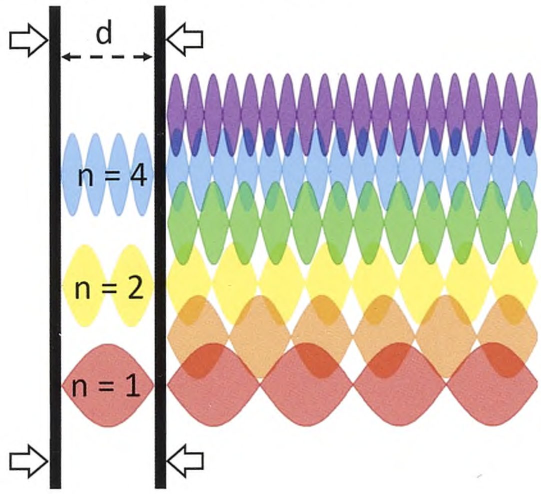
$$F = \frac{\hbar\pi^2 c\beta^4}{240}\frac{A}{d^4}. \tag{13}$$

Analogi med vandbølger

Der eksisterer en effekt, der svarer til Casimireffekten for vandbølger [4]. Når to parallelle plader nedsænkes i vand, som udsættes for kraftige kaotiske rystelser, vil vandbølger i mellemrummet mellem pladerne være begrænset til bølgelængder, der går op med et helt antal halvbølger mellem pladerne. Det vil sige, at hvis afstanden er d, skal bølgelængden for bølger mellem pladerne opfylde relationen:

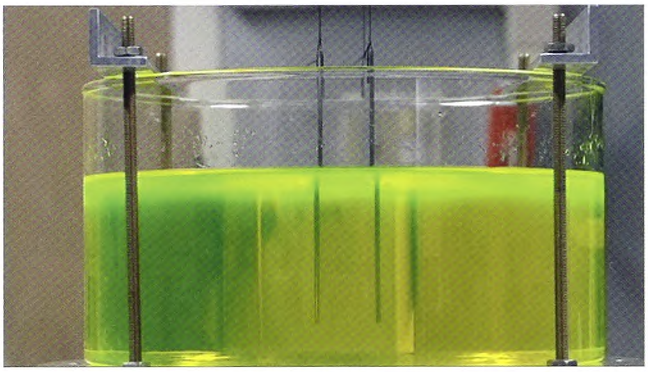
$$\lambda = 2n \cdot d, \quad \text{hvor } n = 1, 2, 3 \ldots \tag{14}$$

Denne restriktion gælder ikke uden for pladerne. Her kan alle bølgelængder kan optræde.

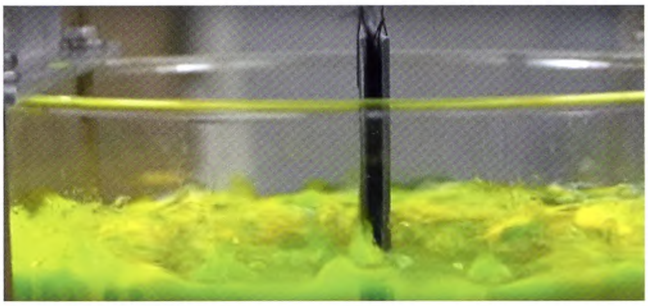


Figur 3. Tilladte bølgelængder.

Dette vil medføre, at ydersiderne af pladerne rammes af flere bølger end indersiderne, og pladerne presses sammen. Resultatet kan ses på figur 4, som viser to plader hængende i vand uden bølger. Hvis vi derimod ryster underlaget, så der opstår et kaos af bølger med alle mulige bølgelængder, vil pladerne presses sammen (figur 5).



Figur 4. Parallelle plader uden bølger.



Figur 5. Parallelle plader med kaotiske bølger.

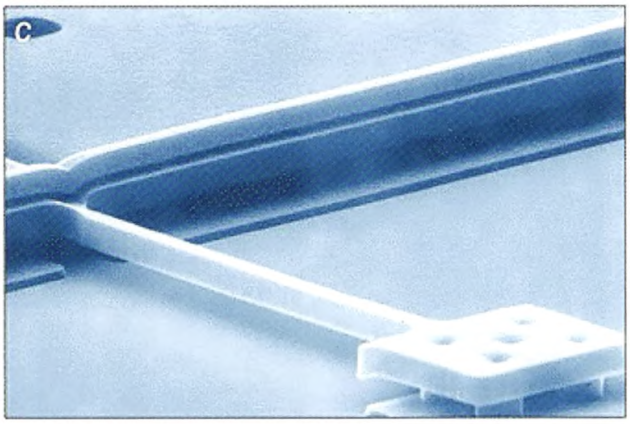
Måling af Casimireffekten

Under normale omstændigheder er Casimirkraften en meget lille kraft. Hvis vi har to plader på 1 cm $\times$ 1 cm i en afstand på 1 μm, vil Casimirkraften være 0,13 μN. Men allerede ved en afstand på 50 nm er trykket fra Casimireffekten lige stor som det atmosfæriske lufttryk.

Dette er alligevel nok til, at kraften kan måles. For mekaniske strukturer på chipniveau kan kraften komme til at påvirke funktionen. Forfatteren har set et eksempel på dette i forbindelse med brug af mikroshutterteknologi til billeddannelse. I 1995 arbejdede en dansk virksomhed sammen med det schweitsiske CSEM-forskningsinstitut på at lave en mikrochip med flere tusinde små lukkere, som kunne åbne og lukke for lys fra en UV-lampe for at danne et billede på en trykplade. En enkelt lukker var udformet omtrent som vist på figur 6.

Det viste sig, at det var umuligt at operere denne chip pålideligt, da Casimirkraften kunne få den enkelte lukker til at sidde fast i åben tilstand, så mange pixler på trykpladen konstant blev belyst. Projektet måtte derfor opgives.

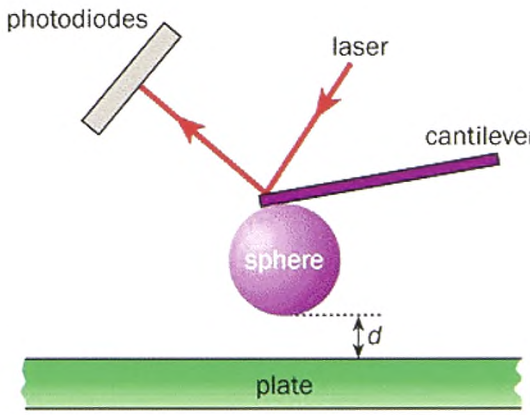
At fortage nøjagtige målinger af Casimireffekten er ikke helt nemt i praksis. Fx er det meget svært at fremstille parallelle bevægelige plader i mikroskopiske dimensioner. Man har derfor i stedet valgt at måle kraften mellem en mikroskopisk kugle og en plade. De første målinger blev foretaget af Marcus Sparnaay, en af Casimirs kolleger, i 1958 [5]. Han fandt en kraft på ca. 15% af de teoretiske forudsigelser, men den eksperimentelle usikkerhed var større end den målte effekt.



Figur 6. Mikroshutter.

Den første nøjagtige måling af Casimireffekten blev foretaget af Steve Lamoreaux i 1997 [6]. Han målte kraften mellem en sfærisk linse, belagt med kobber og guld, og en kvartsplade med samme belægning. Kuglen var ophængt i en tynd stang. En laserstråle registrerer kuglens position. Når kuglen nærmer sig pladen inden for nogle μm fra pladen, vil Casimirkraften skubbe kuglen tættere på pladen. Dette vil bøje udliggeren og laserstrålens vinkel påvirkes.

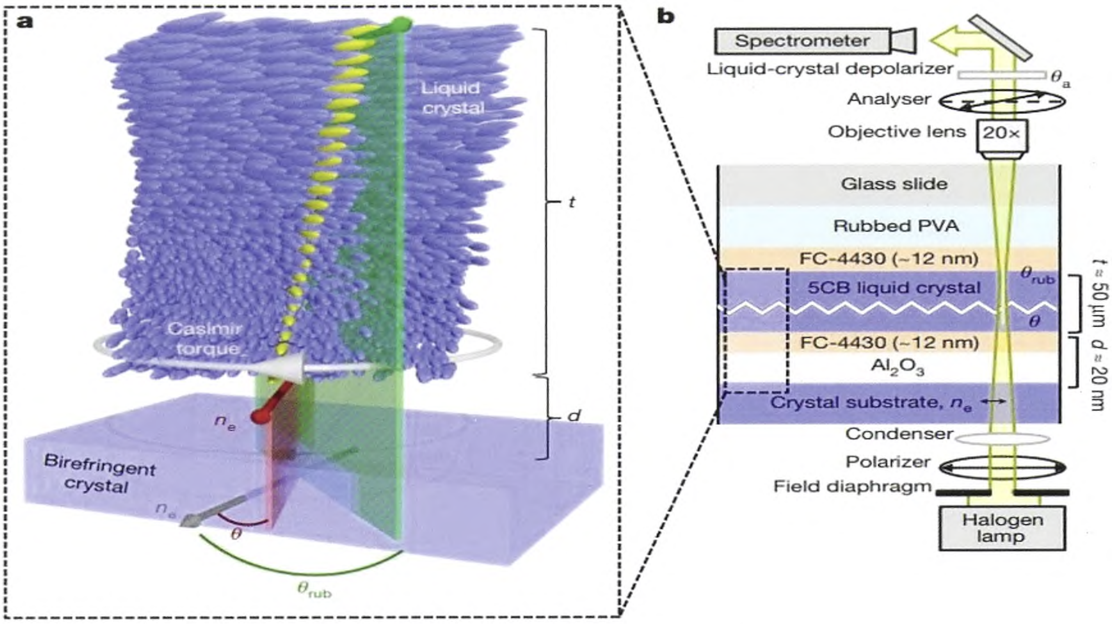
Med dette apparatur kunne Lamoreaux bestemme Casimirkraften, og fandt en overensstemmelse indenfor 5% af de teoretiske forudsigelser.



Figur 7. Lamoreauxs måleopstilling.

Casimirdrejningsmomentet

Lige som Casimireffekten kan frembringe en kraft, kan den også frembringe et drejningsmoment. Denne er lige blevet målt i et meget elegant eksperiment af en gruppe ved University of Maryland [7]. Et Casimirdrejningsmoment opstår fx, når en flydende krystal bringes tæt på en dobbeltbrydende krystal. Fordi materialerne er optisk anisotrope, vil der opstå forskellige brydningsindekser for forskellige polarisationsretninger af vakuumfluktuationerne. Dette vil medføre en kraft, som ændrer retning, når afstanden mellem den flydende krystal og den dobbeltbrynende krystal ændres. Dette medfører, at den flydende krystal drejer sig til positionen med lavest energi. Denne position vil ændre sig med afstanden. Forsøgsopstillingen er vist på figur 8.



Figur 8. Forsøgsopstilling til måling af Casimirdrejningsmoment.

Lys fra en halogenlampe polariseres, og passerer derefter gennem en dobbeltbrydende krystal og en flydende krystal. Opstillingen gør det muligt at måle drejningsmomentet ved at observere drejningsvinklen for krystallen (ved hjælp af det polariserede lys), som funktion af afstanden til den dobbeltbrydende krystal. Forsøget blev udført med fire forskellige krystaller (calcit $CaCO_3$, litiumniobat $LiNbO_3$, rutil TiO_2 og yttriumvanadat YVO_4).

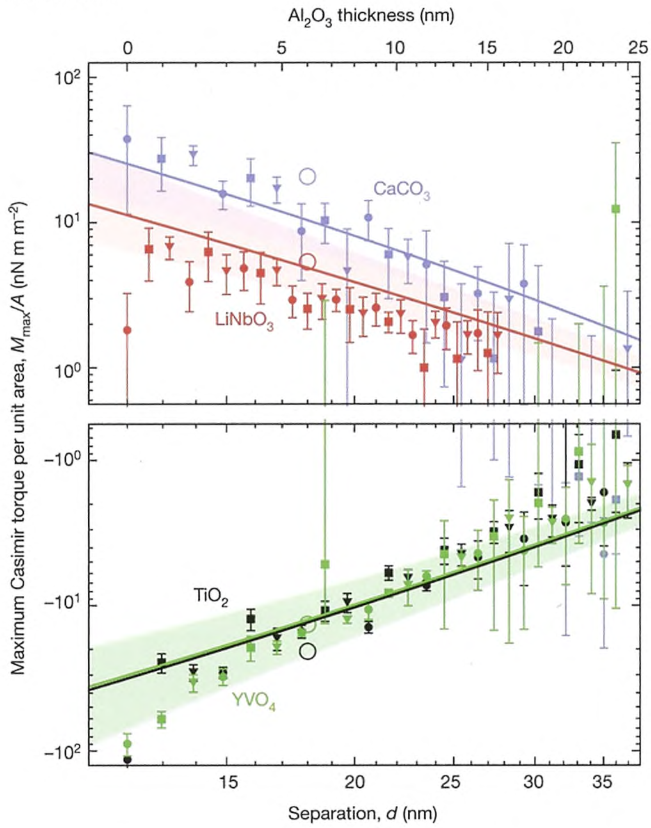
Resultaterne er vist på figur 9, som viser moment per areal som funktion af afstanden. Kurvernes position og hældning afhænger af den dobbeltbrydende krystals egenskaber, men alle kurver viser en lineær sammenhæng mellem Casimirmoment og afstand. Dette er den første pålidelige måling af Casimirmoment, som er offentliggjort.

Det må forventes, at Casimirmomentet i fremtiden vil kunne udnyttes i nano- og mikromekaniske systemer, mikrofluidik og selvmontering af nanostrukturer, hvor effekten af kvantevakuumfluktuationer hidtil har været undervurderet.

Vakuumenergi og universets ekspension

I kosmologien dukker der et begreb op, der kaldes mørk energi. Ophavet til den mørke energi er, at der er uoverensstemmelse mellem mængden af kendt stof i universet og universets overordnede geometri. Sammenhængen mellem universets ekspansion, universetes densitet og rummets krumning er udtrykt i den første Freidmannligning [8], som er en løsning af Einsteins feltligninger for et ekspanderende univers.

Vi ved fra observationer, at universet er meget tæt på at have en euklidsk geometri (et fladt univers). Dette kan vi se ved at der ikke er nogen synlig forvrængning af meget fjerne galakser, som der ville være ved en sfærisk geometri eller en hyperbolsk geometri. Det vil sige, at hvis universet ikke er euklidsk, må krumningsradien være af størrelsesorden 100 milliarder lysår (eller mere). For at opnå dette må universets densitetsparameter Ω_Λ være meget tæt på den kritiske værdi, som giver euklidsk geometri [8]. Denne densitet svarer til ca. 5 brintatomer per m^3. Men når vi summerer den målte densitet af ordinært stof (ca. 0,25 brint atomer per m^3) med den beregnede densitet af mørkt stof, udgør det kun ca. 20% af den kritiske densitet. Kosmologerne har derfor indført begrebet mørk energi som som forklaring på den manglende densitet. Mørk energi er en egenskab ved rummet, og den svarer til en vakuumenergi for hele universet.



Figur 9. Måleresultater for Casimirdrejningsmomentet.

Hvis vi prøver at beregne universets vakuumenergidensitet på samme måde, som da vi beregnede Casimireffekten, støder vi ind i et alvorligt problem. Vi må summere nulpunktsenergien for alle felter, integreret over alle bølgelængder. Dette er divergente integraler, så summen bliver uendelig. Vi kan så argumentere for, at vi kun integrerer op til enten Planckenergien eller Higgsmassen, men i begge tilfælde får vi et resultat der er over 100 størrelsesordener for stort i forhold til den observerede værdi. Dette er fortsat et af de største uløste problemer i fysikken.

Men selv om vi ikke kan beregne densiteten af mørk energi, kan vi sagtens beregne den målte værdis indflydelse på universets ekspansion. For at gøre det skal vi betragte universtes tilstandsligning [9]:

$$P = W \cdot \rho \tag{15}$$

hvor P er trykket, ρ er densiteten og W er en konstant som er afhængig af hvilken type energi, der dominerer universet. Denne konstant har ændret sig siden starten af big bang. I den tidlige fase, hvor temperaturen var høj, og fotonerne dominerede, var W = -1. Da universet var ca. 50.000 år gammelt, blev energidensiteten af stofpartikler større end densiteten af fotoner. Dette svarer til W = 0, det vil sige, at trykket er nul. Men efterhånden som densiteten af stof falder, kommer vakuumenergien til at spille en større rolle. Når den dominerer, er W = -1, og trykket er negativt. Dette medfører, at når universet ekspanderer, udfører det et negativt arbejde på rummet. Dette vil medføre en eksponentiel ekspansion. Det negative tryk skyldes, at når en "boks" af rummet udvider sig, vokser energien med mere end det arbejde, boksen udfører på omgivelserne.

Universets eksponentielle ekspansion blev opdaget i 1998 [10] og udløste nobelprisen i fysik i 2011.

Konklusion

Kvantemekaniske systemer har en nulpunktsenergi på grund af Heisenbergs ubestemthedsrelation. Denne vakuumenergi er ophav til Casimireffekten, som kan give både kræfter og drejningsmoment mellem elektrisk ledende objekter, der er tæt på hinanden. Disse kræfter påvirker mikromekaniske systemer og nanostrukturer, men vil i fremtiden også kunne udnyttes teknologisk i sådanne konstruktioner.

Det ser også ud til, at vakuumenergi skaber et negativt tryk, som er ophav til at universets udvidelse accelererer. Mens vi kan lave nøjagtige beregninger af de forskelle i vakuumenergi, der er ophav til Casimireffekten, er vi helt ude af stand til at beregne universets vakuumenergi, og dermed den kosmologiske konstant. Dette er en af de store udfordringer i fysikken.

Litteratur

[1] H.B.G. Casimir (1948) Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, bind **51**, side 793.

[2] P.W. Milloni (1994) The Quantum Vacuum, An Introduction to Quantum Electrodynamics, Academic Press Inc., side 9–17 og 253–271.

[3] https://uwaterloo.ca/institute-for-quantum-computing/events/peter-milonni-casimir-effects

[4] B.C. Denardo, J.J. Puda og A. Larraza (2009) A water wave analog of the Casimir effect, American Journal of Physics, bind **77**, side 1095.

[5] M.J. Sparnaay (1958) Physica, bind **24**, side 751.

[6] S.K. Lamoreaux (1997) Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μm range, Phys.Rev.Lett., bind **78**, side 5–8.

[7] A.T. Somers, J.L. Garrett, K.J. Palm og J.N. Munday (2018) Measurement of the Casimir torque, Nature, bind **564**, side 386–389.

[8] A. Liddle (2015) An Introduction to Modern Cosmology, John Wiley & Sons Ltd.

[9] B. Schistad (2018) Newton, Einstein og Universets ekspansion, LMFK bladet, nr. 1, side 41–48.

[10] S. Perlmutter (2003) Supernovae, dark energy, and the accelerating universe, Physics Today, april, side 53.

Bernhard Lind Schistad er cand.real. fra Universitetet i Oslo. Han har været forsker i partikelfysik ved Niels Bohr Institutet og CERN og senere arbejdet med udvikling af grafiske systemer og radar. Han har i de sidste syv år undervist i fysik og matematik på Viborg Tekniske Gymnasium.