Protonterapiens fysik – en kort udledning af Bragg-kurven og dens top

Af Pernille Bræmer-Jensen og Ulrik I. Uggerhøj, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet

Med den nært forestående kommissionering af *Dansk Center for Partikelterapi* ved Aarhus Universitetshospital, planlagt til oktober 2018, er det relevant med en simpel, men alligevel stort set retvisende, gennemgang af den såkaldte Bragg-kurve og dens top. Som yderligere motivation til en sådan gennemgang er et emne med arbejdstitlen "Medicinsk fysik" for tiden under overvejelse til brug for "fysik i det 21. århundrede" i gymnasieskolen fra 2018. I denne artikel gives en analytisk tilgang til energitabskurven for protoner op til deres endelige rækkevidde. Formålet er at give en kortfattet og overskuelig gennemgang af en tung, elektrisk ladet partikels indtrængning i stof med særlig vægt på aspekter relevante for partikelterapi.

Protoner i kræftbehandling

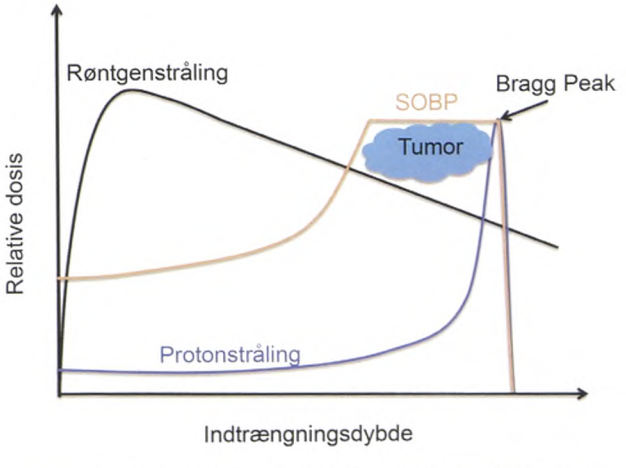
I 2018 åbner Dansk Center for Partikelterapi, DCPT, som en del af Aarhus Universitetshospital og det bliver det første sted i Danmark, hvor kræftpatienter kan blive behandlet med protonstråling frem for røntgenstråling. Derfor har det stor relevans at forstå, hvordan protoner afsætter energi i en tumor såvel som i det raske væv. Det er selvfølgelig komplekst at forstå det fulde billede af, hvordan protonen agerer, og derfor kan et simpelt estimat af den ladede partikels opførsel være meget nyttigt, og også være med til at give en god forståelse for, hvordan denne type stråling kan bruges inden for medicinsk fysik, og hvilke fordele det kan give.

Protoner og tungere ioner bliver i dag brugt som strålingsterapi på over 50 centre verden over [1], og derfor er der allerede meget erfaring med denne type strålebehandling, som også vil blive implementeret i partikelcenteret i Aarhus.

Men hvorfor overhovedet bruge protoner til strålebehandling? Ladede partikler har en meget karakteristisk måde at afsætte dosis på, da de afsætter mest energi lige inden de bliver stoppet helt, mens røntgenstrålingen afsætter energi hele vejen igennem patienten, og den største del af dosis bliver afsat i starten. Denne top for protoner, hvor det meste dosis bliver afsat, kaldes for *Bragg Peak* eller på dansk *Bragg-toppen*, og den er kvalitativt vist i figur 1 som den blå kurve der, i modsætning til røntgenstråling, vist med den sorte kurve, leverer det meste af dosis ved stor indtrængningsdybde. Denne indtrængningsdybde for en Bragg-top er bestemt af protonstrålens energi. Dermed kan et større område af fx en tumor modtage en høj dosis, ved at have flere stråler med varierende energier, den såkaldte *Spread Out Bragg Peak, SOBP* eller udbredt Bragg-top. En SOBP er ligeledes illustreret kvalitativt på figur 1 med den orange kurve. Det er netop denne velafgrænsede rækkevidde, der gør protonstråling fordelagtig, både fordi tumoren bliver bestrålet med højst mulig dosis, og fordi det omkringliggende raske væv samtidigt bliver skånet, og mulige bivirkninger derved mindskes [2].

Som dette er fordelen ved partikelterapi, er det også én af de største udfordringer. Hvor den høje afsatte dosis ender, er af stor betydning, og kan meget præcist bestemmes ved hjælp af energien – hvilket vi vender tilbage til i udregningerne nedenfor. Derfor er det lige så vigtigt, at tumorens placering er kendt med stor nøjagtighed, da der ellers kan afgives store mængder dosis i raskt væv. Det giver nogle restriktioner på, hvilke typer kræft, der med fordel kan behandles med partikelstråling. Hvis tumoren er i lungerne, vil den konstant ændre placering, når patienten trækker vejret, og ligeledes kan en tømt eller fyldt blære ændre positionen af tumoren i prostata. Der bliver forsket i forskellige teknikker, der kan korrigere for disse bevægelser, hvor bl.a. adaptiv strålebehandling er en mulighed, da dosisplanlægningen kan ændres under stråleforløbet.

Den radiobiologiske effekt (altså hvordan strålingen påvirker vævet) ved protonstråling er forskellig fra effekten ved den konventionelle strålebehandling. Hvor stor denne relative forskel, på engelsk kaldet *Relative biological effectiveness, RBE*, er, kan ikke nemt bestemmes, da der kan være rigtig mange faktorer, der spiller ind, fx celletypen, den samlede dosis eller den afsatte energi. Derfor bliver der især også eksperimenteret med hvilke RBE modeller, der giver den bedste forståelse af, hvad den egentlige afsatte dosis er i tumoren såvel som i det raske væv.



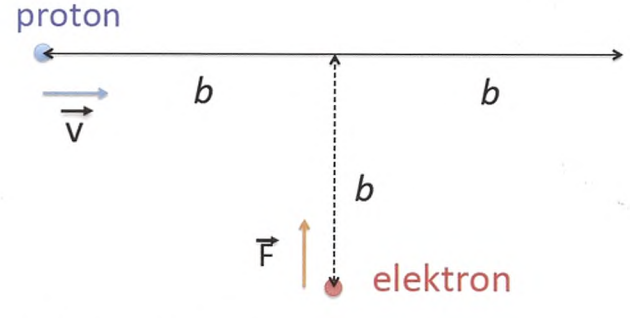
Figur 1. Et eksempel på, hvordan røntgenstråling, sort kurve, og protonstråling, blå kurve, afsætter dosis. Den orange kurve viser et eksempel på "Spread Out Bragg Peak" (SOBP), der udgøres af adskillige vægtede Bragg-toppe, hver med en forskellig indtrængningsdybde og varierende intensitet.

Den basale kollision

En billardkugle der rammer en anden billardkugle med samme masse, vil højst sandsynligt primært blive afbøjet fra sin indkommende retning. Dens energitab vil være ret begrænset, medmindre den rammer den anden kugle i et næsten centralt stød. Derimod, hvis billardkuglen rammer en samling små kugler med samme totalmasse, vil den sandsynligvis kun ændre retning meget lidt, men vil til gengæld tabe en betydelig mængde af sin kinetiske energi, grundet de mange små energioverførsler til kuglerne.

Det er næsten det samme, der sker under nedbremsningen af en hurtig (men i første omgang antaget ikke-relativistisk, dvs. $v \ll c$), tung, elektrisk ladet partikel, der gennemtrænger et materiale. I det følgende betegnes den indkommende partikels masse med M og dens elektriske ladning med ze, hvor z er lig med 1 for en proton. For elektronen betegnes massen med m, og ladningen er $-e$. Energitabet af det tunge projektil sker hovedsageligt – i analogi med billard-tilfældet omtalt ovenfor – gennem mange små energioverførsler til elektronerne i det materiale den gennemtrænger. Med det formål at estimere størrelsen af energitabet, og for at være specifik i forbindelse med partikelterapi til behandling af kræft, vil vi i det følgende betragte protoner, der nedbremses i vand, idet vand udgør hovedbestanddelen af kroppen.

Overførslen af energi til elektronen – og derfor energitabet for projektilet – kommer af den elektriske vekselvirkning mellem protonen og elektronen. Lad nu protonen have en *stødparameter* – den mindste afstand – på b i forhold til elektronen, og antag at protonens bevægelse foregår langs en ret linie, som vist i figur 2. At protonens spor er en (næsten) ret linie, er et resultat af, at protonen er meget tungere end elektronen, som vi antager som værende i hvile i begyndelsen, set fra laboratoriet. Endvidere, idet energitabet ΔE per elektron-kollision er meget småt (af størrelsesorden eV) sammenlignet med den indkommende partikels kinetiske energi E (af størrelsesordenen $10-100$ MeV), kan projektilets hastighed under den enkelte kollision antages at være konstant lig med $\vec{v}$, omend projektilet efter et stort antal kollisioner vil blive nedbremset.



Figur 2. En skematisk tegning af kollisionen mellem en proton og en elektron. Kun kraftkomposanten vinkelret på protonens bevægelsesretning er vist.

Vi estimerer nu vekselvirkningslængden – længden over hvilken protonen overfører en betydelig impulsændring til elektronen – til at være $2b$, se figur 2, således at vekselvirkningstiden Δt kan findes ved at dele med v, dvs.

$$\Delta t \simeq \frac{2b}{v}. \tag{1}$$

Den transversale – i forhold til projektilets retning – kraft $F_\perp$, er under hele vekselvirkningstiden cirka givet ved Coulomb-kraftens størrelse (her angivet i gaussiske enheder, som stort set overalt i det følgende kan konverteres til SI-enheder ved erstatningen $e^2 \to e^2/(4\pi\varepsilon_0)$), dér hvor protonen er i afstanden b fra elektronen,

$$F_\perp \simeq -\frac{ze^2}{b^2}. \tag{2}$$

Her kan vi benytte Newtons 2. lov $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ til at give $\Delta p_\perp = F_\perp \Delta t$, idet vi kun betragter den transversale komponent. I princippet skulle man integrere den korrekte værdi for kraften i den transversale retning, $F_{c\perp}(t) = -ze^2 b/(v^2t^2 + b^2)^{3/2}$, over tid i et interval fra $-\infty$ til $+\infty$. Men i den ovenfor nævnte tilgang er overvurderingen af kraften i ligning (2) kompenseret af en tilsvarende kortere varighed givet ved ligning (1), og faktisk giver $\Delta p_\perp = F_\perp \Delta t$ det samme resultat som den korrekte integration, dvs.

$$\begin{aligned} \Delta p_\perp &= F_\perp \Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{c\perp}(t)dt \\ &= -ze^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{bdt}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ændringen af den longitudinale komponent $\Delta p_\parallel$ – den langs protonens bevægelsesretning – skifter fortegn dér hvor protonen passerer tættest forbi elektronen, dvs. hvor afstanden til elektronen er b. Denne komponent bidrager derfor meget lidt til impulsoverførslen, $\Delta p_\parallel \simeq 0$, idet kollisionens impulsoverførsel i den anden fase – efter passagen – er næsten lig, men med modsat fortegn, impulsoverførslen i den første fase (eksakt lig, i tilfældet med nul energitab, og et lige projektil-spor). Derfor bliver kollisionens totale impulsoverførsels størrelse stort set lig produktet af ligningerne (1) og (2)

$$\Delta p \simeq \Delta p_\perp \simeq \frac{ze^2}{b^2}\frac{2b}{v} = \frac{2ze^2}{bv}, \tag{4}$$

hvor fortegnet er negligeret, da vi ikke er interesserede i, hvilken retning elektronen har efter kollisionen, men blot den energi, den har taget fra protonen.

Idet vi betragter en energirig, men ikke-relativistisk, kollision (dvs. kinetiske energier under $Mc^2 \simeq 1000$ MeV), kan den kinetiske energi skrives som $W = mv^2/2$, og da impulsen er $p = mv$, kan vi skrive $W = p^2/2m$, hvorved overførslen af kinetisk energi per elektron bliver

$$\Delta W \simeq -\frac{(\Delta p)^2}{2m} = -\left(\frac{2ze^2}{bv}\right)^2 \frac{1}{2m} = -\frac{2z^2e^4}{mb^2v^2}, \tag{5}$$

hvor fortegnet viser, at energi bliver taget væk fra projektilet. Alt dette var for en ganske bestemt stødparameter, b, og eftersom atomer er bittesmå, er det umuligt at kontrollere denne stødparameter. Vi må derfor integrere over alle de mulige stødparametre, som protonen udsættes for under kollisionerne med elektronerne, under gennemtrængningen af materialet med massetætheden ρ_m og tykkelse Δx. Med massetætheden givet, bliver

antalstætheden $n = N/V = N_A\rho_m/M_m$, hvor $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$ er Avogadros konstant og M_m er molar-massen. For vand er $M_m = 18{,}0$ g/mol og $\rho_m = 0{,}998$ g/cm^3 hvilket giver $n = 33{,}37 \cdot 10^{21}$ cm^{-3}. Dette er imidlertid molekyltætheden, og da hvert vandmolekyle har $Z = 10$ elektroner, fås

$$n_e = Zn = 3{,}337 \cdot 10^{23}\ \text{cm}^{-3}. \tag{6}$$

Antallet af elektroner, med en stødparameter mellem b og $b+db$, mødt af partiklen mens den gennemtrænger den inifinitesimale tykkelse dx er $n_e 2\pi b db dx$ (antallet af elektroner i en cirkelskive af bredde db, omkreds $2\pi b$, tykkelse dx og tæthed n_e). Således, fra ligning (5), bliver energitabet for disse kollisioner givet som

$$dW_b \simeq -\frac{2Zz^2e^4}{mb^2v^2} n 2\pi b db dx = -\frac{4\pi n Z z^2 e^4}{mv^2}\frac{db}{b}dx, \tag{7}$$

der kan integreres over b, efter at have delt på begge sider med dx.

Integration over stødparametre

Men inden integrationen kan udføres, skal integrationsgrænserne for b bestemmes. Elektronerne i materialet er i virkeligheden ikke helt i hvile, de bevæger sig – forholdsvist langsomt, men de bevæger sig dog – med en vinkelfrekvens ω omkring den kerne de er bundet til. Såfremt kollisionen er tilstrækkeligt fjern, dvs. med stor stødparameter, så er vekselvirkningstiden lang ifølge ligning (1), hvorved elektronen tager mange omgange omkring sin kerne under kollisionen. I dette tilfælde bliver stort set ingen energi overført, i stedet vil det blot resultere i en midlertidig polarisering af elektronskyen. Derfor kan den maksimale stødparameter estimeres som

$$b_{\max} \simeq \frac{v}{\omega}, \tag{8}$$

hvor, hvis $b \gtrsim b_{\max}$, vinkelfrekvensen af elektronen vil være $\omega \gtrsim v/b_{\max}$, så elektronen udfører mange omløb om kernen i løbet af tiden Δt givet fra ligning (1).

Den minimale stødparameter kan findes ved at betragte den maksimale impulsoverførsel til en elektron, $\Delta p_{\max} = 2mv$. For at indse, at udtrykket for $\Delta p_{\max}$ er korrekt, kan man transformere til det referencesystem, hvori projektilet er i hvile, og tænke på en elektron der i dette system rammer protonen med impulsen $p = mv$ og derved bliver reflekteret. Der kan ikke være en større impulsoverførsel end en fuldstændig retningsændring, hvor elektronen starter med $p = mv$ og slutter med $p = -mv$ hvilket giver $\Delta p_{\max}$. Men i henhold til ligning (4), er impulsoverførslen omvendt proportional med stødparameteren, så en maksimal impulsoverførsel svarer til en minimal stødparameter, dvs.

$$\frac{2ze^2}{b_{\min}v} = 2mv = \Delta p_{\max}, \tag{9}$$

der fører til

$$b_{\min} \simeq \frac{ze^2}{mv^2}. \tag{10}$$

Nu kan ligning (7) integreres (vi sætter $dE = \int dW_b$)

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dW_b}{dx} \simeq -\frac{4\pi n Z z^2 e^4}{mv^2}\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b}, \tag{11}$$

hvor integralet giver en (naturlig) logaritme

$$\frac{dE}{dx} \simeq -\frac{4\pi n Z z^2 e^4}{mv^2}\ln\Big(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\Big), \tag{12}$$

hvilket med ligningerne (8) og (10) giver

$$\frac{dE}{dx} \simeq -\frac{4\pi n Z z^2 e^4}{mv^2} L_B \quad \text{med} \quad L_B = \ln\Big(\frac{mv^3}{\omega z e^2}\Big), \tag{13}$$

så præcise værdier for $b_{\max}$ og $b_{\min}$ er ikke nødvendige for at estimere effekten, da afhængigheden kun er logaritmisk.

Fra front-faktoren i ligning (13), $4\pi n Z z^2 e^4/mv^2$, og den langsomme variation af L_B, kan det ses, at energitabet hovedsageligt skalerer som $\propto 1/v^2$, op til det område hvor projektilet bliver relativistisk, dvs. hvor $E_{\text{kin}} \gtrsim Mc^2$ og dermed $v \simeq c$. Fra dette punkt og opefter i energi, bliver energitabet stort set kun en logaritmisk tiltagende funktion.

På den anden side, ved tilpas lave hastigheder vil $b_{\max} \simeq v/\omega$, der aftager med faldende hastighed, og $b_{\min} \simeq ze^2/mv^2$, der tiltager, til sidst blive ens, hvilket må betyde, at denne tilgang bliver ugyldig (logaritmen i ligning (12) bliver negativ under denne grænse). For $z = 1$ sker dette når $(v/v_B)^3 = \hbar\omega/\alpha^2 mc^2$, hvor $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ er finstruktur-konstanten, og $v_B = \alpha c$ er Bohr-hastigheden. For $\hbar\omega = 23$ eV bliver denne betingelse til $(v/v_B)^3 = 0{,}84$, og for en proton bliver Bohr-hastigheden opnået ved en kinetisk energi på 25 keV. Eftersom energitabet for $E_{\text{kin}} \lesssim Mc^2$ øges efterhånden som hastigheden aftager, $dE/dx \propto 1/v^2$, kan man forvente det maksimale energitab ved en energi cirka svarende til Bohr-hastigheden, under hvilken denne approksimation altså fejler. Det er ikke så overraskende, at maksimum opnås dér, idet ved disse energier kan projektilet og elektronen overføre energi 'resonant', da de har næsten ens hastigheder. Derfor øges dets energitab drastisk, efterhånden som projektilets hastighed aftager under indtrængningen. I den afsluttende del af dets bane, hvor projektilets hastighed er på sit laveste, afleverer partiklen derfor en signifikant del af sin kinetiske energi: Bragg-toppens basis [3]. Som det kan ses af bl.a. [4, 5], er der en stor fordel forbundet med dybdepræcision i dosisafsættelsen ved brug af Bragg-toppen i forbindelse med cancerterapi. Det var den kvalitative forklaring af Bragg-toppen, vi udleder nu et analytisk udtryk for hele Bragg-kurven.

Eftersom logaritmen i ligning (13) er en langsomt varierende funktion, bliver essensen af hastighedsafhængigheden for $E_{\text{kin}} \lesssim Mc^2$ altså givet fra front-faktoren $dE/dx \propto 1/v^2$, så for et simpelt estimat kan vi negligere logaritmens variation med hastigheden, og med $z = 1$ og $v = 0{,}43c$ for en 100 MeV proton, sætte logaritmen til

$$L_B = \ln\Big(\frac{mv^3}{\omega e^2}\Big) \simeq 12{,}4, \tag{14}$$

hvor det er benyttet, at $\hbar\omega \simeq 23$ eV for vand. Et alternativ til denne klassiske rute – der i hovedsagen er den Niels Bohr introducerede i 1913 og 1915 – blev senere udledt af Hans Bethe. I hans kvantemekaniske tilgang, bliver L i ligning (14), igen for en 100 MeV proton, erstattet af

$$L = \ln\left(\frac{2\gamma^2 m v^2}{I}\right) - \frac{v^2}{c^2} \simeq 8.0, \qquad (15)$$

hvor det såkaldte ionisations-potential er givet som $I = \hbar\langle\omega\rangle \simeq 75$ eV for vand [6], og en relativistisk korrektion, $-v^2/c^2$, her er blevet sat ind 'per håndkraft'. Som eksempler er værdier beregnet fra ligning (15) for 50 MeV, 175 MeV og 500 MeV lig med 7,2, 8,3 og 9,2, respektivt, dvs. med en en ganske svag variation indenfor intervallet af energier relevante for protonterapi. Bethes tilgang er temmelig præcis for disse relativt høje energier.

Rækkevidde og energitab pr. vejlængde

Højresiden i ligning (13), uden $1/v^2$-delen og med L_B erstattet af L, giver $k_n = 4\pi n Z e^4 L/m$, som vi således sætter til at være en konstant, k_n. Med disse approksimationer og simplifikationer kan energitabet skrives som

$$\frac{dE}{dx} \simeq -\frac{k_n}{v^2}. \qquad (16)$$

Da den kinetiske energi af projektilet i det ikke-relativistiske område er $E = Mv^2/2$ kan vi skrive $dE = Md(v^2)/2 = M2vdv/2 = Mvdv$, hvorved ligning (16) bliver

$$\frac{dv}{dx} \simeq -\frac{k_m}{v^3} \qquad (17)$$

med $k_m = k_n/M = 4\pi n Z e^4 L/mM$. Vi kan nu omskrive ligning (7) til

$$v^3 dv \simeq -k_m dx \qquad (18)$$

og integrere på begge sider, fra en indgangshastighed v_0 til sluthastigheden $v = 0$, svarende til en indgangsdybde på $x = 0$, til partiklens endepunkt ved 'rækkevidden' $x = x_0$,

$$\int_{v_0}^{0} v^3 dv \simeq -k_m \int_0^{x_0} dx. \qquad (19)$$

Disse integraler kan løses til

$$-v_0^4 \simeq -4k_m x_0, \qquad (20)$$

hvorved rækkevidden er proportional med kvadratet på partiklens kinetiske energi $x_0 \simeq v_0^4/4k_m = (Mv_0^2/2)^2/M^2 k_m$

$$\boxed{x_0 = \frac{E^2}{4\pi n Z e^4 L}\frac{m}{M}}. \qquad (21)$$

Omsat til tal kan det udnyttes, at $e^2 = 14{,}4$ eV·Å, $m/M \simeq 1/1836$ og $n_e = nZ = 3{,}337 \cdot 10^{23}/\mathrm{cm}^3$ for vand (og med $L = 8{,}3$)

$$x_0 = \frac{E^2}{1325\ (\mathrm{MeV})^2}\ \mathrm{cm}, \qquad (22)$$

så en proton med en kinetisk energi på 175 MeV har en rækkevidde på 23,1 cm i vand. I virkeligheden er dens rækkevidde 20,6 cm, dvs. godt 12 % kortere – ikke dårligt når man tager approksimationens lidt grove karakter i betragtning.

I stedet for, som i ligning (19), at integrere hele vejen op til partiklens endepunkt, kan vi integrere op til punktet x, hvor hastigheden er v, som er mindre end v_0

$$\int_{v_0}^{v} v^3 dv \simeq -k_m \int_0^x dx \qquad (23)$$

så

$$v^4 - v_0^4 \simeq -4k_m x. \qquad (24)$$

Ved hjælp af ligning (20) opnås

$$v^2 \simeq 2\sqrt{k_m(x_0 - x)}, \qquad (25)$$

der kan indsættes i ligning (13) til at give et energitab pr. vejlængde, den såkaldte stoppe-evne, for en proton på

$$\frac{dE}{dx} \simeq \frac{2\pi n Z e^4}{m\sqrt{k_m(x_0 - x)}} L \qquad (26)$$

eller

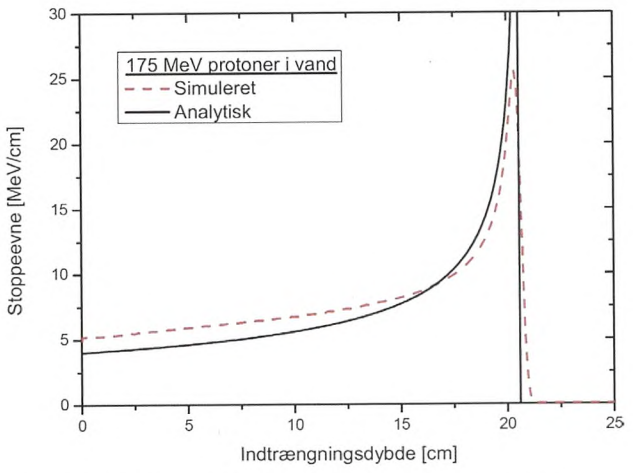
$$\boxed{\frac{dE}{dx} \simeq \sqrt{\frac{\pi n Z e^4 L}{x_0 - x}}\sqrt{\frac{M}{m}}}, \qquad (27)$$

der er næsten identisk med energiafsætningen (en lille del af projektilets tabte energi kan undslippe materialet, f.eks. i form af de såkaldte δ-elektroner). Ligning (27) viser Bragg-kurvens omtrentlige form: At stoppe-evnen afhænger af indtrængningsdybden x, frem til partiklens rækkevidde x_0, som en funktion $dE(x)/dx \propto 1/\sqrt{x_0 - x}$. Man kan naturligvis øge præcisionen i forhold til eksperimentelle data ved en forøgelse af den matematiske kompleksitet, og gennem introduktionen af mindre betydningsfulde fænomener, men det sker oftest på bekostning af gennemskueligheden af de bagvedliggende fysiske mekanismer. De her indrammede formler giver således et relativt simpelt estimat for Bragg-kurverne, men er til gengæld overskuelige og rimeligt præcise.

Divergensen ved $x = x_0$ forsvinder ved introduktion af den såkaldte energitabs-spredning, der skyldes det statistiske element i nedbremsningsprocessen: Ikke alle protoner med samme indgangsenergi taber samme mængde energi i løbet af den samme tilbagelagte afstand. Igen var Niels Bohr en af de første i behandlingen, med et estimat for kvadratet på energitabsspredningen, Ω_B^2, der er givet ved

$$\Omega_B^2(x) = 4\pi n Z e^4 x, \qquad (28)$$

ved gennemtrængning af et materiale af tykkelse x.



Figur 3. Simulerede og beregnede Bragg-kurver for 175 MeV protoner i vand. Simuleringen er udført med 'Shield-hit' [9], der tager 'alle' vekselvirkninger med så eksakt som muligt, og som er vist at være i fin overensstemmelse med eksperimenter. Beregningen er udført med ligning (27), men med rækkevidden omskaleret fra værdien givet fra ligning (21), 23,1 cm, til den målte værdi, 20,6 cm. Der er overordnet en forskel på op til cirka 30 %, men totalt set er kurvernes former ret ens. Den simple tilgang givet i denne artikel og de resulterende indrammede udtryk for rækkevidde og stoppeevne giver således en udmærket første approksimation til Bragg-kurverne.

Omsat til tal (igen med $L = 8{,}3$), bliver energitabet cirka lig

$$\frac{dE}{dx} \simeq \frac{18{,}2}{\sqrt{x_0/\mathrm{cm} - x/\mathrm{cm}}} \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{cm}}, \qquad (29)$$

hvorved en 175 MeV proton taber

$$\frac{dE}{dx} \simeq \frac{18{,}2}{\sqrt{23{,}1 - x/\mathrm{cm}}} \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{cm}}, \qquad (30)$$

dvs. omkring $dE/dx \simeq 3{,}8$ MeV/cm ved $x \ll x_0$, ifølge denne approksimation. Dette er i rimelig overensstemmelse med målinger [7] og tabeller [8] der giver $dE/dx \simeq 4{,}9$ MeV/cm, og er i overensstemmelse med den lidt længere rækkevidde sammenlignet med eksperimentelle værdier. Simulerede og beregnede Bragg-kurver er vist i figur 3. Man kan se, at den simple tilgang givet i denne artikel, og de resulterende indrammede udtryk for rækkevidde og stoppeevne, giver en udmærket første approksimation til Bragg-kurverne. Tillige giver udledningen forhåbentlig en god fysisk fornemmelse for, hvorfor Bragg-kurverne ser ud som de gør.

Litteratur

[1] Particle Therapy Co-Operative Group, https://www.ptcog.ch/index.php/facilities-in-operation.

[2] Det nationale center for partikelterapi, https://www.rm.dk/siteassets/om-os/a_udbud/dnu_partikelterapi/-det-nationale-center-for-partikelterapi-2012.pdf.

[3] W.H. Bragg og R. Kleeman (1904), On the Ionization Curves of Radium. *Phil. Mag.* bind **8**, 6th series, 726.

[4] C.S. Søndergaard (2016), Strålebehandling med partikler. *KVANT* årgang **27**, nr. 2, maj 2016, s. 28.

[5] C.E. Andersen (2016), Dosimetri og kalibrering – det fysiske grundlag for stråleterapi. *KVANT* årgang **27**, nr. 2, maj 2016, s. 11.

[6] H. Paul (2007), The mean ionization potential of water, and its connection to the range of energetic carbon ions in water. *Nucl. Instr. Meth. B* **255**, 435. https://doi.org/10.1016/j.nimb.2006.12.034.

[7] S. Molinelli m.fl. (2013), Dosimetric accuracy assessment of a treatment plan verification system for scanned proton beam radiotherapy: one-year experimental results and Monte Carlo analysis of the involved uncertainties. *Phys. Med. Biol.* bind **58**, 3837-3847. https://doi.org/10.1088/0031-9155/58/11/3837

[8] stopping-power and range tables for protons (pstar⋆), http://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html.

[9] SHIELD-HIT12A (Monte Carlo particle transport program), http://shieldhit.org.

Pernille Brœmer-Jensen er fysikstuderende ved Aarhus Universitet. Hun specialiserer sig inden for medicinsk fysik, og er i øjeblikket i gang med sit bachelorprojekt, der handler om modeller for de biologiske effekter ved protonstråling i tumor i prostata.

Ulrik I. Uggerhøj er professor ved Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet, og underviser bl.a. i kurserne 'Speciel relativitetsteori' og 'Partiklers indtrængning i stof'.