Matematik er kunst uden pensel, kunst er matematik uden kridt

Af Henrik Jeldtoft Jensen, Department of Mathematics and Institute for Mathematical Sciences, Imperial College London, South Kensington campus

Skønt matematik og kunstmaling på overfladen kan forekomme som to meget forskellige aktiviteter, så besidder de dog mange fælles begrebsmæssige og håndværksmæssige træk på et lidt dybere plan. Slægtskabet går langt videre end den umiddelbare forbindelse som består i at geometri naturligvis spiller en betydelig rolle i begge discipliner. Både matematik og malerkunst beskæftiger sig med at begribe den omkringliggende verden gennem symboler. Begge søger gennem abstraktion at beskrive de vigtige og relevante generelle sammenhænge, som kan gemme sig bag det specifikke. Begge aktiviteter forsøger at begribe og håndtere begreber så som åben i modsætning til lukket, eller endelig i modsætning til uendelig. Ydermere benytter begge discipliner sig af kvalificerede gisninger og eksperimenterende undersøgelser. Det er ikke mindst vigtigt for den måde, vi underviser matematik på, at forholde sig til at matematik som disciplin er essentielt af samme natur som kunst, musik, humanvidenskab og ikke mindst malerkunst. Da vil vi undgå den fejl, som består i at opfatte matematik som noget ganske specielt og ligefremt menneskefremmed. Vi vil derimod indse, at matematik bør dyrkes på samme legesyge og eksperimenterende facon, som er traditionen, når man underviser i kunst, hvor eleven nemmere får fornemmelse af, at præcision og udforskning følges ad.

Introduktion

Matematik er videnskaben om mønstre; kunstmaling er artikulering gennem mønstre.

Idéen om, at der skulle være en barriere mellem de forskellige menneskelige aktiviteter, er naturligvis ny. Vi ved alle at Leonardo da Vinci var lige så meget maler, som han var videnskabsmand. Mange ved sikkert også, at Isaac Newton selv opfattede sin teologiske interesse og undersøgelser som lige så vigtige og betydningsfulde som hans naturvidenskabelige aktiviteter. Nok var da Vinci og Newton unikke i deres intellektuelle kapacitet, men de er langt fra de eneste videnskabsfolk og matematikere, som har fundet det frugtbart og vigtigt at beskæftige sig med kunst, teologi eller humaniora. Der behøver ikke at være en kløft på tværs af disciplinerne, tværtimod er der slægtskab og gensidig berigelse på tværs af de forskellige måder, mennesker forsøger at fordøje og kapere omverden på.

Matematik og kunstmaling er forbundet på mange måder og på mange niveauer. Først er der den tekniske forbindelse, udviklet for eksempel af den italienske arkitekt Filippo Brunelleschi omkring år 1400. Man kan tænke på den geometriske metode, som underbygger perspektivtegning. Eller man kan nævne den tematiske forbindelse, som Maurits Escher repræsenterer. Escher var fascineret af matematiske begreber og idéer, det inspirerede ham til at skabe billeder af det strengt talt fysisk umulige: såsom hans periodiske vandfald, der altid løber ned af, selvom det løber rundt i sig selv.

I det følgende vil jeg forsøge at beskrive, hvorledes matematik og malerkunst er beslægtet på en meget dyb måde. Helt basalt forsøger både matematik og malerkunst at repræsentere den omkringliggende virkelighed. Her er ikke kun tale om en snæver fysisk virkelighed, men en mere omfavnende realitet, som ikke er bange for at tillægge åndelige konstruktioner en eksistens. Endvidere tilstræber både malerkunst og matematik en vis grad af universalitet. At dette er muligt bliver straks klart, når vi tænker på Euklids geometri (ca. 300 f.Kr.) eller vægmalerierne i Knossos (omkring 1500 f.Kr). Selvom vort verdensbillede gennemgribende har ændret sig siden Knossos og Euklid, så er vi dog fuldt ud i stand til at værdsætte kunsten fra Knossos og bygger i dag videre på Euklids matematik. Jeg vil understrege følgende faktum: malerkunst og matematik er fælles om at forsøge at udvikle en symbolsk, koncis, og ofte meget abstrakt, repræsentation af virkeligheden. I begge tilfælde benyttes en proces som består af to stadier. Først *fordøjes* de væsentligste og mest generelle aspekter. Dernæst forsøger man gennem eksperimenter at finde frem til den bedste måde ved hjælp af symboler at repræsentere den identificerede struktur og det relevante tema. Denne helt basale fælles formålsparagraf er årsagen til en række idé- og begrebsmæssige paralleller mellem matematik og malerkunst. Nedenfor vil jeg diskutere hvorledes begreber som *åben* og *lukket*, eller *endeligt* og *uendeligt* er temaer, som bliver betragtet, håndteret og undersøgt både i matematik og i malerkunst. Jeg vil forsøge at tydeliggøre min argumentation ved at relatere nogle eksempler på matematisk formalisme og begreber til nogle udvalgte malerier. Jeg vil slutte af med nogle forslag til, hvorledes slægtskabet mellem matematik og malerkunst kan benyttes til at udvikle undervisningen i matematik.

Tekniske paralleller

At man kan forbinde matematik med malerkunst bliver straks klart, når man tænker på hvorledes matematik kan bruges til at analysere billeder. Perspektivtegning har været studeret matematisk i flere hundrede år og for nylig er man blevet klar over, at fraktal geometri er den bedst egnede til at beskrive mange naturlige objekter, såsom skyer og bjerge. For få år siden tiltrak Taylor, Micolich og Jonas (1991) betydelig opmærksomhed, da de foretog en kvantitativ analyse of Pollock's drypmalerier. Den matematiske analyse bestod i at måle, hvorledes de dråber af maling, som Pollock har strintet udover lærredet, er fordelt. Forfatterne konkluderede at Pollocks dråber former fraktale strukturer på lærredet[1]. Ud fra denne tekniske undersøgelse påpegede Taylor et al., at på en måde er Pollocks malerier figurative og naturalistiske, idet naturen omkring os indeholder fraktaler alle vegne. Denne form for relation mellem matematik og malerkunst er af ekstern analytisk karakter (Jensen 2002). Den demonstrerede, at matematik kan være nyttig, når man vil analysere et billede, og måske kan forøge vores forståelse af billedets indhold og budskab. Men denne forbindelse mellem malerkunst og matematik er beslægtet med det forhold, der findes mellem matematik og ethvert emne, som kan undersøges matematisk. Vi kan naturligvis med stort held benytte matematik, når vi vil designe en bro. Men selve konstruktionen af broen er nok af en ganske anden natur end det at dyrke eller udføre matematik. Formålet med brobygning er et ganske andet end formålet med matematik. Det ændrer ikke noget ved, at matematik er yderst brugbart for brobyggere. Forholdet mellem matematik og malerkunst er langt mere intimt. De er fælles om hensigt og formål, ydermere er der megen lighed mellem de mentale aktiviteter involveret i begge aktiviteter.

Begrebsmæssige paralleller

Matematik og malerkunst er tydeligvis fælles om at forsøge at indfange og beskrive de dele af virkeligheden, som ikke på en tilfredsstillende måde kan beskrives ved hjælp af sproget alene. Et billede af en kvinde kan f.eks. på et plan repræsentere en kvinde og samtidig på et andet plan række langt bag om det konkrete afbillede objekt. Det kan tydeligt illustreres ved at tænke på, hvorledes den ortodokse kirkes ikonmalere stræber efter at skabe billeder, der bringer os i forbindelse med helt andre dimensioner af virkeligheden. Når en person, der besidder en grad af religiøs følsomhed, mediterer over et ikon af Jomfru Maria, er det ikke et portræt af en ung kvinde, der fremkaldes i beskuerens bevidsthed. Det er snarere et sæt af transcendentale begreber og følelser, som er relateret til *Theotokos* eller *Gud-bæreren* eller *Den som fødte Gud*. Ikonets formål er at frembringe eller kommunikere abstraktioner, som er langt fjernet fra den umiddelbart håndgribelige fysiske verden. Ikonet forsøger at håndtere begreber, som ikke kan reduceres til den lave båndbredde, som vort dagligsprog er begrænset af. Det er klart nok ikke kun religiøs kunst, som vil udtrykke det usigelige. Ethvert maleri, figurativt eller abstrakt, indeholder altid et forsøg på, at frembringe opfattelser og følelser i beskuerens sind, der er langt større end, hvad en verbal beskrivelse af lærredets objekter vil indfange.

Figur 1. "Holy Icon of Theotokos Threnody" (ca. 1860-1880) af Ioasaf Athonites.

Situationen er den samme i matematikken. Her konstrueres et begrebsmæssigt univers med nogle forankringspunkter til den fysiske observerbare virkelighed. Herfra foretages så en ekspedition ud i den abstrakte verden, som bæres i den menneskelige bevidsthed. Lad os som eksempel tænke på tallene. De naturlige tal kan umiddelbart bringes i relation til konkrete objekter, såsom antallet af kugler på en kugleramme. De rationelle tal lader sig også begribe ved hjælp af simple geometriske figurer, f.eks. opdeling af en lagkage. Det er straks sværere at repræsentere de irrationelle tal på en håndgribelig måde. Mindst konkrete er dog de komplekse tal, som er defineret ved deres algebraiske egenskaber, nemlig som bekendt ved at antage, at man kan opnå negative værdier ved at multiplicere et komplekst tal med sig selv[2]. Endskønt de komplekse tal kan forekomme verdensfjerne, så ved vi nu, at de tillader os at beskrive fundamentale dele af virkeligheden. For eksempel ville vi ikke kunne beskrive den atomare kvantemekaniske verden uden de komplekse tal – eller en tilsvarende algebraisk struktur.

Det er også naturligt at nævne, at både matematik og malerkunst benytter sig af et symbolsprog, der er i stand til at fremmane associationer, som der ikke umiddelbart refereres til. Dette forudsætter dog at "beskueren" besidder den rette baggrund. Tænk på, hvorledes ovenstående Theotokos' Ikon hos en ortodoks kristen kan frembringe associationer til et transcendentalt religiøst plan, som ikke direkte er tilstede i billedet. Et parallelt eksempel fra matematik består i de myriader af associationer, som en person med en

[1] Hvorvidt der strengt taget er tale om en fraktalfordeling eller en uniform Euklidisk fordeling kan diskuteres. Taylor, Micolich og Jonas fandt en fraktal dimension meget tæt på 2. Men det er ikke af betydning for vores diskussion her.

[2] Identifikationen af komplekse tal med punkter i den to dimensionale plan kan måske nok forekomme som en simpel repræsentation sammenlignelig med at repræsentere de naturlige tal vha. kugler eller de reelle tal vha. længden af et linjestykke. Men man skal huske, at den geometriske repræsentation af komplekse tal kom til sent i deres historie, samt at man bliver nødt til at pålægge bestemte regler for, hvorledes punkterne i planen kan adderes og multipliceres før planen bliver ækvivalent med de komplekse tal.

smule matematisk træning oplever, når man betragter diffusionsligningen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D\nabla^2 \varphi. \tag{1}$$

For en person uden kendskab til matematisk notation vil ligningen ikke betyde meget. Men har man en baggrund i matematik, vil man straks ledes til at tænke på begreber så som varme, tilfældig gang (random walk), fløde der spreder sig i en kaffekop og meget andet. Og alt det på trods af, at symbolerne i ligningen ikke direkte refererer til noget af dette. De begrebsmæssige ligheder mellem matematik og malerkunst er for mig at se årsagen til en række fællestræk i strukturen af matematik og kunst. Begge benytter sig på en meget bevidst og essentiel måde af emergens, eller hvad man kan kalde ikke-lineær konstruktion, hvor slutresultatet har et indhold, som er væsentligt forskelligt fra bestanddelene. Jeg vil illustrere dette først med et lille eksempel og dernæst betragte paralleller mellem Euklids geometri og Kandinskys teori om den åndelige betydning af geometriske objekter og former.

Her er et eksempel på kunstnerisk skabelse. Tag følgende komponenter "•", "•", "–" og "(". Hver enkelt del genererer ikke megen følelsesmæssig bevægelse. Men sætter vi nu delene samme til •ᴗ•, så vil vort sind straks reagere. Vores mentale reaktion på det lille ansigt er et resultat af en uendelighed af vekselvirkende komponenter. Først er der de fire geometriske elementer, dertil kommer hele vort kognitive maskineri og dermed også vor kulturelle baggrund. Alle disse bestanddele må samarbejde for at sætte beskueren i stand til at registrere og fortolke det følelsesmæssige indhold i den lille figur.

På tilsvarende måde i matematik. Ikke-lineære operationer fører også her til helt nye egenskaber, som er "større end summen af de enkelte dele". Igen er det vekselvirkningen mellem komponenterne, der giver anledning til, at noget helt nyt kan opstå. Et nemt og dog rimeligt repræsentativt eksempel kan være en ikke-lineær funktion af mere end én variabel, f.eks. $f(x, y) = (x + y)^2$. De funktionelle og geometriske egenskaber af $f(x, y)$ er kvalitativt forskellige fra den lineære opførsel af de enkelte uafhængige variable opfattet som funktioner: $g(x) = x$ og $h(y) = y$. Et mere interessant tilfælde, som også er mere beslægtet med det lille "smiley"-eksempel, består i de nye egenskaber, som kan fremkomme i grænsen, hvor man betragter en uendelighed af vekselvirkende variable. Den matematiske beskrivelse af fysiske faseovergange, såsom når vand fryser, består i at beskrive vekselvirkningen mellem "uendelig" mange partikler. Den dramatiske faseændring kan kun opstå, når uendeligt mange partikler er involveret. Det er parallelt til, at der er myriader af komponenter involveret, når de fire geometriske byggesten "•", "•", "–" og "(" og vores sind transformerer det lille billede •ᴗ• til en følelsesoplevelse.

Lad os nu kigge lidt på den bemærkelsesværdige lighed, der er imellem Euklids geometri og Kandinskys forsøg på at etablere et analytisk og aksiomatisk fundament for malerkunsten. De følgende få citater er tilstrækkelige til at illustrere pointen.
Fra Euklids første bog:

> Definition 1. Et punkt er det, som ikke har nogen bestanddele.
> Definition 2. En linie er en længde uden bredde.
> Definition 3. Enderne af en linie er punkter.
> Definition 4. En ret linie er en linie, hvor punkterne ligger jævnt.
> Definition 5. En flade er det, som kun har længde og bredde.
> Definition 6. Kanterne af en flade er linier.
> ...

Som vi alle ved konstruerede Euklid sin geometri ud fra definitionerne ved hjælp af deduktion og aksiomer. Så lad os nu sammenholde dette med Kandinskys bog *Punkt und Linie zur Fläche* fra 1926. Kandinsky skriver:

> Elementer: Det første uundgåelige spørgsmål er naturligvis spørgsmålet angående elementerne, som er kunstens byggematerialer, og som sådanne er forskellige for hver enkelt kunstform.

Kandinsky fortsætter dernæst med at introducere en række definitioner:

> Det geometrisk punkt: er en usynlig ting. Derfor må det være en ulegemlig ting. Betragtet i termer af substans er det lig med nul. Skjult i dette nul er imidlertid visse egenskaber som er af "menneskelig" natur...

> Den geometriske linie: er en usynlig ting. Det er sporet efterladt af et bevægende punkt, dvs dets produkt. Det er skabt af bevægelse – mere specifikt gennem punktets destruktion af det intense selvstændige svar... Ved begrebet "Basis Plan" forstås den materielle plan, som skal modtage kunstværkets indhold. Det vil blive betegnet BP. Det skematiske BP er afgrænset af 2 horisontale og 2 vertikale linier, og vil derved fremstå som en individuel ting...

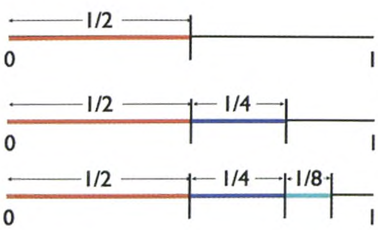
Lige som Euklid udleder Kandinsky dernæst fra definitionerne egenskaber, som hans byggesten må besidde. Han bemærker således f.eks.: "Linien er derfor den største antitese til det billedlige proto-element – dvs til punktet. Strengt taget kan linien blive betragtet som et sekundært element".

Disse to korte uddrag illustrerer at både matematik og malerkunst, i det mindste nogle gange, kan blive betragtet som deduktive aktiviteter. Der er måske nogle, som vil sige at den nære parallel mellem Euklid og Kandinsky kommer fra, at de begge beskæftiger sig med geometri i en eller anden form; og at de derfor ikke repræsenterer et mere generelt slægtskab mellem malerkunst og matematik. Men dertil er at betragte begreber, som ikke er af direkte geometrisk natur. Jeg har for nogle år siden diskuteret, hvorledes begreber som *åben* og *lukket*, der benyttes i topologi, nogle gange kan relateres til den overordnede atmosfære i et billede (Jensen 2002). Her vil jeg gentage, at et billede som van Goghs *Værelse i Arles* fra 1889 (Musee d'Orsay, Paris[3]), bibringer beskueren en fornemmelse af indelukkethed; af en lille del af universet totalt lukket af fra det omkringliggende. Dørene er lukkede. En seng blokerer den ene og en stol er stillet foran den anden. Rummets eneste vindue er tildækket, måske det er skodder, som afskærer udsynet. Billedets kant er tydeligt markeret og indeholdt i selve billedet. J.M.W. Turner udtrykker den modsatte følelse i sit billede *Snowstorm* fra 1842 (Tate Britain, London[4]). Dette billede strækker sig langt ud over lærredets felt. Billedet er fuldstændigt åbent. Her gøres det klart at hele verden er omsluttet af en voldsom altopslugende snestorm. Vi kan simpelthen ikke nå ud af billedet.

Parallellerne mellem matematik og malerkunst er ikke kun begrænset til det figurative. Lad os som eksempel kigge på, hvorledes det abstrakte begreb *uendeligt* behandles. Det uendelige er helt centralt i matematik. Zenons paradoks er et eksempel på matematik, der kræver håndtering af det uendelige. Paradokset omhandler væddeløbet mellem skildpadden og Achilles og involverer addition af uendeligt mange tal. Grunden til at Achilles vil indhente og overhale den langsomme skildpadde er naturligvis, at Achilles kun behøver en endelig tid til at løbe afstanden mellem skildpadden og ham selv. Skildpadden formår at forvirre Achilles ved at bryde afstanden op i en uendelighed af små bidder. Først må Achilles løbe den 1/2 distance, dernæst halvdelen af, hvad der er tilbage, altså 1/4 af den oprindelige afstand. Når han har gjort det, må han atter igennem halvdelen af, hvad der nu er tilbage, altså 1/8 af den oprindelige afstand. Så Achilles må gennemløbe en uendelighed af etaper, og det ser jo slemt ud, som om det kunne tage uendeligt lang tid. Bedre bliver det ikke af at skildpadden, hver gang Achilles har afsluttet en etape vil have bevæget sig lidt længere frem, men dette er ikke væsentligt, så lad os ignorere den detalje nu. En lille tegning viser straks at summen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \tag{2}$$

vil summere op til 1.



Figur 2. Intervallet halveres i det uendelige.

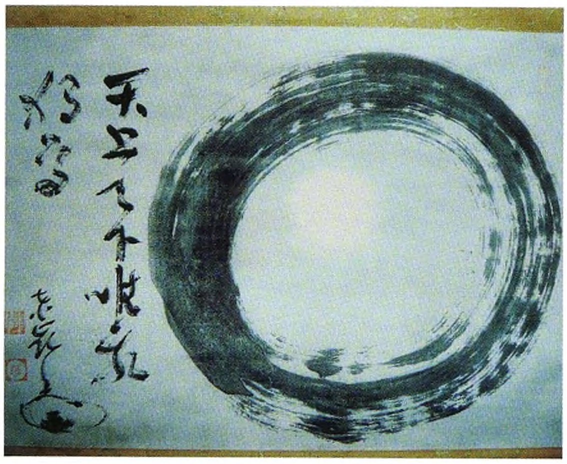
[3]http://www.ibiblio.org/wm/paint/auth/gogh/

[4]http://www.tate.org.uk/servlet/ViewWork?workid=14786

Altså behøver vi ikke foretage en uendelighed af operationer for at konkludere, at

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1. \tag{3}$$

Dvs et pænt endeligt resultat. Vores intellekt og matematik kan håndtere det uendelige i et snuptag og uddrage et endeligt resultat. Det er uden betydning, at den faktiske beregning, dersom vi udførte den, ville bestå i at addere uendelig mange brøker, og derfor ville tage uendeligt lang tid.

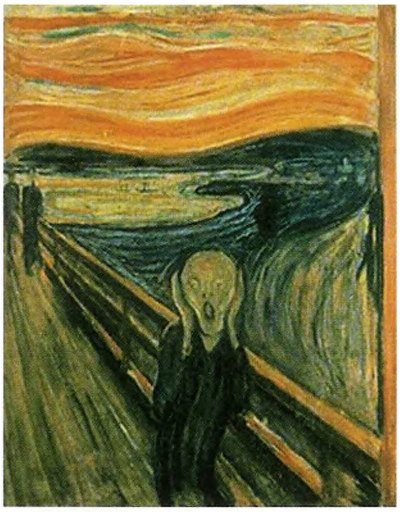


Figur 3. "Zen Circle" eller "Enso" af Torei Enji (1721-1792).

En maler kan på en tilsvarende måde repræsentere det uendelige. Det er elegant demonstreret i Torei Enji's (1721-1792) Enso, eller Zen Cirkel, tegnet med blæk på papir. En Enso symboliserer i Zen Buddhismen oplysning, styrke og elegance. Men samtidig repræsenterer en Enso også universet og det tomme rum. På den måde kan en Enso ses som en repræsentation af det uendelige og det uudtømmelige. Zen Cirklens virkemåde bliver måske mere tydelig, når man betragter den cirkulære form ○ i kontrast til trekanten △. Hjørnerne på trekanten bryder den fornemmelse af uophørlig bevægelse, som opstår i vort sind, når vore øjne følger cirklens periferi. Derfor kan cirklen række ud mod det uendelige, mens trekanten forbliver bundet til det endelige.

Parallelle strategier

Det er både interessant og belærende at overveje, hvorledes den samme angrebsmåde kan blive identificeret i både matematik og malerkunst. Jeg mener, der er talrige eksempler herpå, men vi vil blot kigge på et par stykker her. Lad os begynde med at overveje, hvorledes figurativ analyse benyttes i kontrast til ikke-figurativ. Kandinsky er en fremragende eksponent for forsøget på at kommunikere ved hjælp af en ikke-figurativ kode. Tilsvarende, selv om megen matematik har sit udspring i geometri og analyse af rumlige strukturer, så er der også discipliner, såsom talteori og gruppeteori, i hvilke der stort set ikke benyttes nogen direkte figurativ analogi. Dog vil en matematiker efter at have beskæftiget sig med enten talteori eller gruppealgebra et stykke tid, udvikle en intuitiv repræsentation af de abstrakte matematiske strukturer, som lever et sted uden for den figurative virkelighed. Dette svarer helt til Kandinskys program nævnt ovenfor, i hvilken han prøvede at identificere den ikke-figurative åndelige værdi af abstrakt malede former.



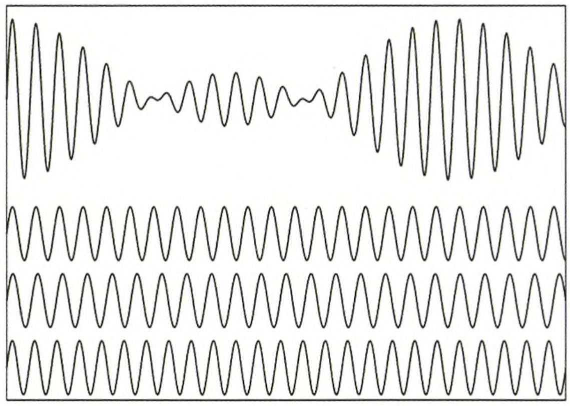
Figur 4. "Skriget" af Edward Munch, olie tempera og pastel på karton. National Gallery, Oslo.

Et andet tydeligt eksempel på parallelle strategier i malerkunst og matematik består i bestræbelsen på at uddrage det essentielle og udelade irrelevante detaljer. Tænk på Edward Munchs *Skriget* eller, som det oprindeligt blev kaldt, *Naturens Skrig*. Kun det absolut nødvendigste er inkluderet i billedet for på den måde at sikre, at den overordnede komposition frembringer en fornemmelse af uudgrundelig angst. Billedets hjerteskærende effekt er i høj grad et resultat af, at detaljer *ikke* får lov til at distrahere. Hvis Munch havde gengivet ansigterne, eller de menneskelige former, mere detaljeret, ville vort sind straks frembringe associationer til bestemte mennesker, vi kender. På tilsvarende måde er vi ikke i stand til at forbinde de brede strøg, som angiver baggrunden, med en bekendt geografisk lokalitet. Vi er derfor tvunget til at opleve billedet som en prototype af generel relevans for vores følelsesliv. Hvis den skrigende figur i forgrunden havde mindet mig om min tante, eller de to mørke skikkelser i baggrunden så ud som de to ubehagelige fyre, der altid var ude på ballade lørdag aften i min barndoms by, da ville jeg måske ikke have forstået at figuren i forgrunden er mig selv på vej over én af de mangfoldige virkelige eller virtuelle broer, jeg må krydse på min vej gennem livet.

I matematik kan det være lige så vigtigt at udelade irrelevante detaljer. Tænk på Newtons bevægelsesligning

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{4}$$

Denne ligning beskriver, hvorledes positionen af en partikel, $x(t)$, afhænger af tidspunktet t, når kraften F virker på partiklen. Ligningen henviser kun til partiklens masse m, og kraften F, derimod negligeres f.eks. partiklens farve og alder. Både Munchs maleri og Newtons lov er i stand til at studere det relevante emne, verdensangst og partikelbevægelse, ved at udelade en uendelighed af detaljer. Dybden af vor forståelse er nært forbundet med at identificere for dernæst at negligere de irrelevante detaljer.

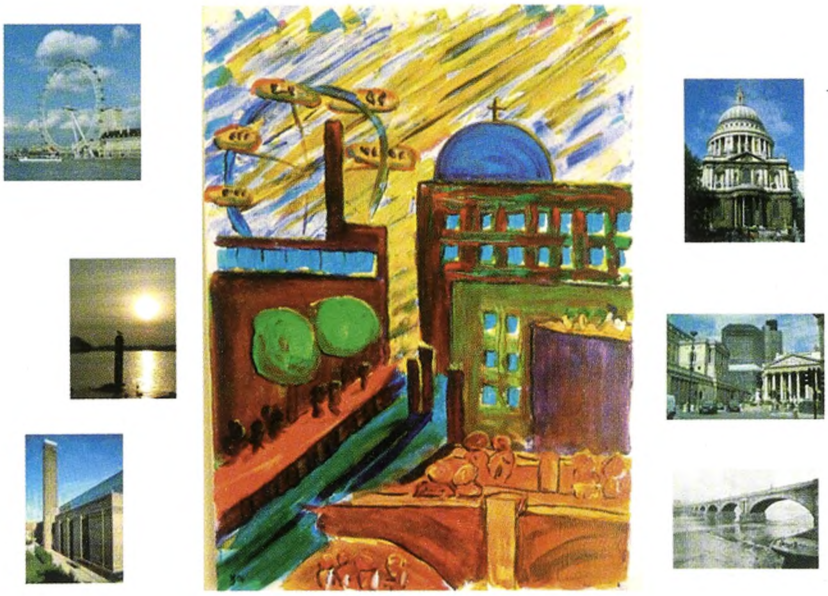


Figur 5. Interferens mellem tre bølger med næsten samme frekvens.

Det hænder ofte at maleren og matematikeren benytter sig af en analog teknik. Vi vil blot kigge på to eksempler. Det første består i brugen af superposition. Dvs at man adderer komponenter for at opnå en helhed, som er forskellig fra, og ofte på mange måder af en anden natur, end samlingen bestående af de individuelle dele. Superposition i matematik kan f.eks. bestå i at addere oscillerende bølger for derigennem at opnå en ny type tidslig opførsel. I den følgende ligning lægger vi tre sinus-bølger sammen med lidt forskellige frekvenser, θ_1, θ_2 og θ_3, for at konstruere et nyt signal $f(t)$:

$$f(t) = \sin(\theta_1 t) + \sin(\theta_2 t) + \sin(\theta_3 t). \tag{5}$$

Resultatet bliver, som vist på figuren, et signal af en ganske anden type. Interferensen mellem de tre bølger frembringer en bølge med en lavfrekvent variation i signalets amplitude. Det er naturligvis netop denne "stødfrekvens", man benytter sig af, når man med gehør stemmer et strengeinstrument og drejer på stemmeskruerne indtil de lavfrekvente stød forsvinder. Fremkomsten af en ny kvalitet gennem kombination af komponenter kan også fornemmes i maleriet af Londons vartegn (figur 6). Billedet er malet efter hukommelsen. Fotografierne fra internettet er indsat som reference. Selv om de forskellige strukturer befinder sig spredt på tværs af London, så formidler billedets superposition måske det helhedsindtryk, som en turist føler efter en travl sightseeing tur i storbyen. Hukommelsen har en tendens til at registrere en helhed – en collage – hvor enkeltoplevelser mister deres præcision for i stedet tilsammen at efterlade én fornemmelse i vort sind.



Figur 6. Collage over berømte steder i London.

Vort sidste eksempel på begrebsmæssige paralleller mellem matematik og malerkunst har at gøre med hierarkiske strukturer. Fra matematikken kan man tænke på de forskellige typer af tal. Først er der de naturlige tal $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, som er indeholdt i de hele tal $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, som er indeholdt i de rationale tal $\mathbb{Q}$, der atter er indeholdt i de reelle tal $\mathbb{R}$, som er indeholdt i de komplekse tal $\mathbb{C}$. Eller mere kortfattet

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{6}$$

Moderne matematik er opbygget ved hjælp af abstrakt mængdelære, som netop er en formaliseret måde at beskrive relationer mellem grupper af forskellige objekter. Mængdelære benyttes hele tiden på tværs af alle matematikkens discipliner og tillader en meget større præcision, end det var muligt tidligere.

Russells paradoks er et berømt eksempel på de komplikationer, der kan opstå, når man kombinerer hierarkiske strukturer og selvreference. Russell foreslog at "betragte en mængde der indeholder alle de mængder, som ikke er medlemmer af dem selv". Hans overvejelser ledte ham til et paradoks af samme natur, som det den mytologiske Epimenides fra Kreta opdagede, da han sagde: "Alle kretensere er løgnere. Jeg er kretenser. Lyver jeg eller ej?"

Ovenstående skulle gøre det klart at hierarkier er af stor betydning i matematikken. Hierarkiers styrke udnyttes også i malerkunsten til at fremmane et globalt og ubundet indtryk. Tænk på Picassos malerier såsom *Portræt af Ambroise Vollard*[5] eller *Klarinetspilleren*[6].

Billedet nedenfor er et semi-figurativt eksempel på en hierarkisk komposition. Det samme tema gentager sig selv i mindre skala (en fraktal), hvorved det bliver svært at udnævne nogle områder i billedet, som værende mere vigtige end andre. Måske billedet på den måde opnår en omfavnende transcendental karakter.

Figur 7. Dybdevirkning i fraktalt maleri.

Konsekvenser

Spørgsmålet er, om de ligheder, der eksisterer mellem matematik og malerkunst, er af nogen væsentlig betydning. Jeg mener at dette slægtskab giver os mulighed for at forholde os til matematik på en anden og mere kreativ måde, end det ofte for tiden er tilfældet. Når vi betragter matematik som væsensbeslægtet med malerkunst, falder det lige for at introducere børn og voksne til matematik gennem en åbensindet bred eksperimentel angrebsvinkel. Ydermere bliver det klart, at hvem som helst kan gøres bekendt med matematik. Som bekendt er det ikke usædvanligt at høre folk, der hævder, at der kræves en bestemt type hjerne for at forstå matematik. Det kan nok være sandt, hvis man tænker på matematik på højeste forskningsniveau. På samme måde som Picasso var en specielt begavet maler, og Mozart var usædvanlig musikalsk talentfuld, var Einstein uden tvivl bedre end de fleste til at tænke

[5] http://www.artchive.com/artchive/P/picasso/vollard.jpg.html
[6] http://www.thearttribune.com/Picasso-cubiste.html

logisk (og intuitivt). Men det er jo ikke sådan, at enten kan man male som Picasso, eller også maler man overhovedet ikke. Eller enten har man Mozarts geni, eller også synger man aldrig en sang. På tilsvarende måde er det klart, at man kan beskæftige sig berigende med matematik uden at have Einsteins fremragende begavelse. Slægtskabet mellem matematik og malerkunst viser præcis, at matematisk tænkning er naturlig for den menneskelige hjerne. Børn og voksne benytter gerne krusedulletegning som en måde at hjælpe tankerne på gled. Kruseduller er en form for symbolsk tænkning, hvad enten de foregår på et bevidst analytisk eller et delvist ubevidst intuitivt plan. Pointen er, at matematisk tænkning ofte er tæt beslægtet med de tankeprocesser, som vi alle benytter os af, når vi laver kruseduller eller simple tegninger og malerier. Og derfor er en krusedulle-tegnende hjerne også i stand til at tænke matematisk, i det mindste på et basalt niveau.

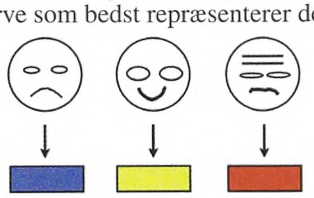
Så hvorfor ser vi ikke børn og voksne bryde ud i spontane matematiske overvejelser på samme måde, som vi ser dem lege med tegning? Årsagen er den samme som, hvorfor vi ikke bryder ud i spontane jubelbrøl på aramæisk. Det er ikke fordi vor hjerne ikke besidder kapaciteten til at tale aramæisk, eller fordi man skal besidde et specielt talent for at tale aramæisk. Vi er nødt til først at modtage målrettet træning i det aramæiske sprog. Ligeledes må vi stille træning i matematik til rådighed for derved gradvist at udvikle det naturlige potentiale hos børn og voksne. Hvis vi betragter undervisning i matematik fra det udgangspunkt, at matematik og malerkunst er væsensbeslægtede, vil vi nok ændre på vor pædagogiske strategi. Jeg foreslår, at det kan være befordrende at nærme sig visse matematiske idéer ved at bede elever eller studenter om at lave billeder, der vil rette elevens forestillingsverden mod de vigtigste overordnede aspekter af det matematiske emne, man skal til at introducere. Måske eleverne på denne måde vil blive klare over, at før vi tilegner os de mere tekniske sider af matematikken, er vi nødt til først:

1. at lære at analysere: dvs. identificere det væsentlige.
2. at lære at kombinere og komponere.
3. at blive behændige i brugen af symbolsprog.

Følgende tre konkrete eksempler skulle tydeliggøre, hvorledes jeg mener dette kan gøres.

(A) Matematisk emne: Topologi/mængdelære – åbne og lukkede mængder.
Øvelse: Tegn en struktur som ikke indeholder sin egen afgræsning. Tegn en anden som eksplicit afgrænser sig selv.

(B) Matematisk emne: Funktional, f.eks. $y = y(x) \mapsto J[y]$.
Øvelse: Lav en serie af smileys i forskelligt humør: bedrøvet, glad, vred, syg, etc. Knyt nu til hver smiley en enkelt farve som bedst repræsenterer dens humør.



(C) Matematisk emne: At se indholdet bagom formalismen.
Øvelse: Diskuter det følelsesmæssige indhold i Munchs *Skrig*.

Konklusion

Vi oplever for tiden både et paradoks og et seriøst problem. Vor verden bliver uophørligt baseret mere og mere på matematik. Handel, ingeniørvidenskab, medicin, psykologi, sociologi, sprogvidenskab, filmkunst etc. er alle væsentligt afhængige af matematik. Samtidig ser vi mange steder, i det mindste i den vestlige verden, et dalende niveau af matematikundervisningen i grundskolerne. Måske dette er årsagen til det faldende antal af studerende, der i videregående uddannelser vælger matematisk relaterede fag. Jeg tror, at en ændring af vor attitude er nødvendig. Vi bliver nødt til at fremstille matematik som, hvad det virkelig er, nemlig en levende og undersøgende aktivitet fuld af leg og undren, og ikke blot en disciplin som består i at lære udenad, hvad folk i en fjern fortid hittede på. Ved at sammenholde matematikkens væsen med andre menneskelige udtryksformer, såsom malerkunst, vil vi nemmere kunne gøre det klart, at det kan være ligeså berigende at tilbringe tid med Eulers tanker, som det er at dvæle over et billede af Picasso eller være omsluttet af Mozarts musik.

Jeg er Vibeke Nordmark Hansen, Barbara Nordmark Jeldtoft Jensen og Paolo Sibani taknemmelige for behjælpelige kommentarer til den engelske udgave af denne artikel, der blev præsenteret som nøgleforelæsning ved *International Conference "Excellence: Education & Human Development"*, i Athen den 1.-4. juli 2009.

Litteratur

[1] Jensen, H.J. (2002), Mathematics and painting, *Interdisciplinary Science Review*, bind **27**, No. 1, p. 45-49. (se www.ma.ic.ac.uk/~hjjens)

[2] Euklids Elementer er blevet publiceret på mangfoldig vis op gennem århundrederne. Følgende er en rigtig god hjælp http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html

[3] Kandinsky, W. (1979), Point and line to Plane, Dover Publications, Inc. New York.

[4] Taylor, A., Micolich, A., Jonas, D. (1999), Fractal expression, *Physics World*, bind **12**, October, p. 25-28.

Henrik Jeldtoft Jensen er professor i matematisk fysik ved Imperial College London, hvor han leder en forskningsgruppe i kompleksitetsvidenskab (www3.imperial.ac.uk/mathsinstitute/).