Ikke-kommutativ geometri

Af Ryszard Nest, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet

Ikke-kommutativ geometri er en relativt ny matematisk disciplin, som er opstået ved sammensmeltning af forskellige grene af matematikken. Den har indført nye idéer og veje at tænke på mange velkendte matematiske problemer i topologi, geometrisk gruppeteori og matematisk fysik. I denne artikel vil vi forsøge at forklare lidt om dens metoder og hvordan de kan tænkes at blive anvendt i kvantegravitation.

Ikke-kommutativ geometri er en relativt nyudviklet disciplin, som skabtes for omtrent 30 år siden ud fra et ønske om at finde et sammenhængende grundlag for en række fænomener, som kom fra vidt forskellige områder af både matematik og fysik, men som syntes at have meget til fælles. Dens grundlægger er Alain Connes [1], som i den forbindelse fik Crawford-prisen.

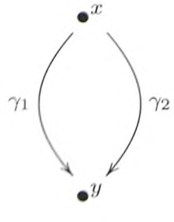
En algebra af funktioner

Det matematiske princip som er meget vigtigt i den sammenhæng stammer fra grundlæggeren af den moderne algebraiske geometri, Alexander Grothendieck. Det siger, at en struktur på et rum er bestemt af en algebra af funktioner på rummet. Polynomier, differentiable funktioner eller kontinuerte funktioner giver f.eks. allesamen forkellige strukturer på den reelle akse. Men omvendt, bestemmer punkter i rummet ikke nødvendigvis alle de interessante funktioner.

Et godt eksempel er en dobbeltrod af en andengradsligning. Det svarer til ét punkt (hvis der kun er én mulig værdi af løsningen af andengradsligningen), men to forskellige "funktioner", som ikke kan adskilles ved hjælp af deres værdier.

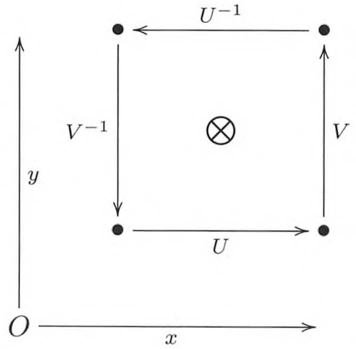
Den anden observation som er vigtigt her stammer fra kvantemekanikken. Den siger os, at "funktioner" som svarer til de fysiske observable kommuterer ikke. I et fysisk eksperiment er det ikke ligegyldigt, i hvilken rækkefølge observationer udføres, Det mest kendte eksempel er Heisenbergs "usikkerhedsrelation" der siger, at hvis x betegner beliggenheden af en partikel og p dens impuls, så er $xp \neq px$. Det medfører både at, vores algebra af "funktioner" er ikke-kommutativ, og at "punkter" i rummet bliver visket ud. Lad os betragte to simple eksempler.

Figuren herunder viser et "to-dimensionalt" punkt:



Vores funktioner (γ_1 og γ_2) har fire værdier, og danner 2×2 matricer, De to "punkter" kan ikke skilles af.

Det andet eksempel stammer fra fysik, og er følgende. Vi tænker på en elektron, som er tvunget til at blive på et gitter, f.eks. et saltkrystal.



I midten har vi et magnetfelt (markeret med $\otimes$) lodret mod tegningens plan. Eksperimentet siger, at hvis elektronen løber rundt i cirklen, resulterer det i et faseskift i elektronens bølgefunktion. Hvis U og V betegner henholdsvis flytning i x- og y-retningen, kan det beskrives med relationen $V^{-1}U^{-1}VU = e^{i\theta}$. Med andre ord, en algebra genereret af de to forskydninger er ikke-kommutativ. I modsætning til det forrige eksempel, kan man slet ikke finde nogle "punkter", og de to observationer som beskriver værdierne af x- og y-koordinaterne, kommuterer ikke.

Den konkrete algebra, som genereres af U og V kaldes for en ikke-kommutativ torus $\mathbb{T}^2_\theta$ og den dukker op flere forskellige steder i matematikken. Dens lokale version, den såkaldte "kvanteplan", er genereret af ikke-kommuterende koordinater x_1, x_2, x_3, x_4, der opfylder relationer af formen:

$$x_i x_j - x_j x_i = \theta_{i,j}$$

Denne struktur er mere og mere anvendt i kvantefeltteori under betegnelsen "ikke-kommutativ rumtid". Forhåbningen her er, at den ikke-kommuterende natur af variablene vil hjælpe med at løse divergensproblemer i teorien. Der findes efterhå nden modeller, hvor denne forhå bning er opfyldt, men de er langt fra hvad vi har brug for, for at kunne beskrive den virkelige verden. Men selv de enkleste eksempler peger på nye fænomener, som kan opstå i den situation. En meget enkelt model af en partikel i et ikke-kommutativt rum udviser for eksempel ikke-perturbative effekter. Eksempelvis findes der ligevægtstilstande – de såkaldte instantoner – som ikke kan ses ved at ekstrapolere fra den semiklassiske grænse.

Geometri

Det næste skridt er "geometri". Klassisk geometri er det samme som "afstandsmåling", dvs, givet to punkter i rummet, tilskriver vi dem deres afstand

$$\bullet \overset{dx}{\rule{4em}{0.4pt}} \bullet$$

I det øjeblik, hvor vi har opgivet punkterne, er vi tvunget til at finde en anden beskrivelse af geometri. Her kommer fysikken igen til hjælp. Det vigtigste vink er meget klassisk, det er *måleenheder*. De har en lang historie, med de nyeste standarder helt anderledes end de gamle, som bestod af stykker af platin opbevaret i en kælder i Paris i 1800-tallet. Den moderne tidsenhed er f.eks. givet ved afstanden mellem to spektrallinier i et Cæsium-133 atom, på et bestemt punkt på jordens overflade. Dvs. den rigtige måde at bestemme enheder er ved hjælp af energispektre, som i matematik svarer til et "spektrum af en operator". Den operator, som dukker op her, er velkendt i kvantefeltteori som "propagator" eller som den inverse af "Dirac-operatoren", $D\!\!\!/$, faktisk møder man ofte tegninger af formen

$$\bullet \overset{D\!\!\!/^{-1}}{\rule{4em}{0.4pt}} \bullet$$

Det samlede resultat er en spekraltripel, som består af

- En algebra $\mathcal{A}$ af observable (algebra betyder, at dens elementer kan lægges og ganges sammen), typisk ikke kommutativ;
- Et (Hilbert-)rum af tilstande, hvor vores algebra virker;
- En Dirac-operator, $D\!\!\!/$, som virker på rummet af tilstande, og som har et energispektrum som bestemmer både dimensionen af vores system og som kan bruges som erstatning for afstand.

Der er nogle relationer mellem observable og Dirac-operatoren, der kan sammenfattes som et udsagn om, at observable lokaliserer både afstands- og tidsmålinger foretaget ved hjælp af Dirac-operatoren. I vores første eksempel er den eneste mulighed en 2×2 matrice af formen

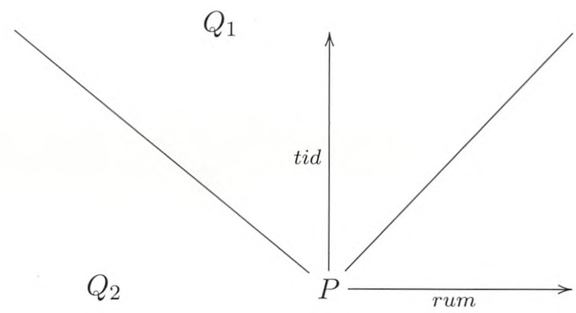
$$\frac{1}{l}\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\},$$

hvor l svarer til afstanden mellem vores to punkter – punkter kan ikke skilles ad, men deres afstand er alligeved veldefineret. Det dimensionsbegreb, som dukker naturligt op i denne sammenhæng er typisk hverken et heltalligt eller reelt tal.

Den måde at tænke på viser sig at være meget effektiv, især i matematik. Men den har også konsekvenser ved anvendelser i kvantefeltteori. Det er faktisk nok at betragte den enkleste mulige ikke-kommutative model for vores 'tidsrum', hvor man tænker sig et *fladt* Minkovski-rum sammen med en meget mild ikke-kommutativ ingrediens som i vores første eksempel med 2×2-matricerne. Her har vi allerede struktur nok til at rekonstruere vores viden om partikelfysik. Det viser sig nemlig, at Dirac-operator nærmest kan udledes kanonisk fra første principper, og at dens spektrum reproducerer standardmodellen i partikelfysikken (fænomenologisk) i et *krumt* rum. Den klassiske gravitationsteori dukker op som en konsekvens af den ikke-kommutative struktur.

Når først vi har bevæget os over i den ikke-kommutative verden, dukker der nye fænomener op, som kan relateres til fysik. En af de vigtigste er, at de fleste af de algebraer, som kommer frem ved beskrivelsen af fysiske systemer, har en naturlig og nærmest kanonisk "tidsudvikling".

For at forklare dette, kan vi tænke på kausalitet i gravitationsteorien. I relativitetsteorien, medfører grundantagelsen om lysets endelige hastighed en endelig hastighed af korrelationer. Det betyder, at to begivenheder kun kan influere hinanden hvis de sidder i hinandens lyskegle:



Det som sker i P har indflydelse på det som sker i Q_1, men ikke på det som sker i Q_2.

Hvis vi husker vores "usikkerhedsrelationer", betyder det at observable lokaliseret i P og Q_1 ikke kommuterer, mens observable lokaliseret i P og Q_2 kommuterer med hinanden. I vores algebraiske beskrivelse dukker denne effekt op som en parametergruppe af automorfier af $\mathcal{A}$ (tænk: tidsudvikling), som har følgende egenskab. Når vi flytter observable lokaliseret i P fremad ved hjælp af vores automorfier, vil de nye observable ikke kommutere med dem som er lokaliseret i P. Mens dem som ligger udenfor lyskeglen vil komutere med alt det som er lokaliseret i P. I kvantefeltteori kaldes det for lokalitetsprincippet, og det er en af de vigtigste principper der anvendes ved opbygning af modeller i teoretisk fysik. Det som er overraskende her er, at den omvendte konstruktion viser sig at være mere naturlig. Det er en nærmest entydig konstruktion af automorfigruppen baseret på den ikke-kommutative natur af vores algebra. Man fristes til at sige, at tidsforskydning inden for lyskeglen er bestemt af ikke-kommuterende egenskaber af observable. Denne gruppe af automorfier kaldes for modulær-gruppen og den er direkte relateret til noget som er kendt i statistisk fysik som Kubo-Martin-Schwinger-betingelsen. Selve KMS-betingelsen kan formuleres relativt til vores automorfigruppe og de tilstande som opfylder den, kaldes for KMS-tilstande. I konkrete fysiske systemer svarer de til ligevægtstilstande.

En anden effekt af ikke-kommutativitet er det som i fysik kaldes for faseovergange, f.eks. smeltning af is. For at forklare dette, kan vi gå tilbage til vores modulær-gruppe. Generelt tillader den flere forskellige ekstreme KMS-tilstande, eller "rene faser" af vores system. Ved skalering af parametrene (ændring af tidsenhed, som her opfører sig som ændring af "temperatur") ændres de tilladte KMS-tilstande og deres struktur. En præcis analyse af dette fænomen er blevet foretaget ved analyse af spektale tripler associeret til aritmetiske systemer, men også nogle mere fysiske modeller, de såkaldte "fuzzy spheres".

Idéen i "fuzzy spheres" er, at opbygge et ikke-kommutativt system associeret til rotationssymmetrien af en kugleoverflade og undersøge dens KMS-tilstande. Ved det som svarer til lave temperaturer observeres et fuldstændig kaotisk (faktisk endelig dimensional) system, igen beskrevet med endelige matricer. Når temperaturen vokser, dukker der en faseovergang op af flere tilladte ekstreme KMS-tilstande, som reproducerer både den glatte struktur og geometrien af kugleoverfladen.

Et af forsøgene på at anvende ikke-kommutativ geometri til kvantegravitation starter på lignende måde som den beskrevet af Jan Ambjørn i hans artikel i dette nummer af Kvant. Rumtiden erstattes med en samling af små kasser, de såkaldte simplekser. Men her skilles vejene lidt. Til stierne langs kanterne i vores samling af kasser tilskrives observable, de såkaldte holonomier, som ikke kommuterer. Algebraen af holonomier har et naturligt rum, som den virker på, og en naturlig Dirac-operator, som giver den ikke-kommutative version af "geometrien" på samlingen af alle mulige "geometrier" på vores samling af kasser. Selve algebraen af holonomier er på dette stadium ret kedelig, den svarer til vores endelig dimensionale matricer. Men geometrien beskrevet af Dirac-operatoren indeholder allerede lidt flere informationer. Næste skridt består af en undersøgelse af, hvad der sker ved grænseovergangen, når kasserne deles op igen og igen. Her dukker der nogle interessante fænomener op:

- Kravet om konsistens af vores konstruktion under inddelinger tvinger os automatisk til at arbejde med fermioner (partikler med halvtalligt spin), som faktisk er overraskende i en ren "gravitationsteori";
- Konstruktion af Dirac-operatoren har en naturlig skaleringsinvarians, som svarer til, at jo nærmere vi vil studere et bestemt punkt, jo højere energi skal der anvendes.
- Det er relativt nemt at konstruere de såkaldte kohærente tilstande, som beskriver den semi-klasiske grænse, hvor kvanteeffekter på tidsrummet ignoreres og hvor partikler bliver beskrevet indenfor rammerne af kvantemekanikken. Den resulterende teori viser sig til at være den velkendte Dirac-ligning for en partikel i et krumt rum.

Men arbejdet med denne model er kun lige begyndt, og foran os ligger der en stor del forskning, inden man kan sige noget om teoriens anvendelighed.

Litteratur

[1] Webside af Alain Connes, http://www.alainconnes.org/en/downloads.php

[2] Joachim Cuntz (2001), Quantum Spaces and Their Noncommutative Topology, *Notices AMS*, Sept. 2001, 793-799.

Ryszard Nest er professor ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet. Han leder forskningsgruppen i Ikke-kommutativ Geometri der, sammen med Topologigruppen, danner Grundforskningscenter i "Symmetri og Deformationer". Hans hovedinteresser er centreret omkring anvendelser af ikke-kommutativ geometri i analyse, deformationsteori og matematisk fysik.