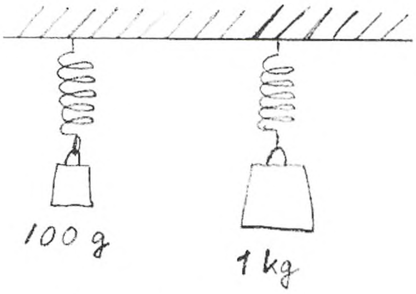
Opgave-hjørnet

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, John Rosendal Nielsen og Michael Cramer Andersen, KVANT

Vi vil med denne udgave af Opgave-hjørnet supplere serien af breddeopgaver med nogle kortere opgaver – med løsning – så man ikke skal vente helt til næste nummer af KVANT. Vi lægger ud med to små opgaver om henholdsvis fjedre og tal. Løsningerne kan findes efter breddeopgaven.

Opgave 1. Svingningstid af to fjedre

Et lod på 1 kg hænger i en kraftig fjeder og et andet lod på 100 g hænger i en blødere fjeder. De to fjedre er lige lange både uden belastning og med de angivne lodder (se tegningen). *Hvor stor er forskellen på svingningstiden af de to lodder?*



Figur 1. To fjedre med lodder.

Opgave 2. Tre tal i forholdene 1:2:3

Konstruer 3 trecifrede tal der er i forholdene 1:2:3 til hinanden. Man skal bruge alle tallene fra 1 til 9 én gang hver.

Breddeopgave 23. Darcys lov

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 23 i rækken i KVANT):

I hydrologien beskrives vands strømning i undergrunden ved den såkaldte Darcys lov. Den udsiger, at strømningshastigheden et givet sted er proportional med trykfaldet per længdeenhed det pågældende sted. Proportionalitetskonstanten afhænger af, om det f.eks. er ler, sand eller grus, der gennemstrømmes, og den kaldes det pågældende materiales permeabilitet for vand. Permeabiliteten må antages at afhænge af både størrelse, form og sammenpakning af de korn, materialet består af. Hvordan afhænger permeabiliteten af kornstørrelserne i materialer, hvis kornformer og sammenpakningsmåder antages ens? Begrund svaret.

Løsning

Darcys lov kan åbenbart skrives:

$$v = -k \cdot \frac{dP}{dx}, \tag{1}$$

hvor v er strømningshastigheden, dP/dx er trykfaldet per længdeenhed og k er permeabiliteten. De fysiske størrelser, som k kan tænkes at afhænge af, er vandets viskositet η, vandets massefylde ρ og størrelser, former og sammenpakninger af kornene i materialet. En given fordeling af kornstørrelser, kornformer og deres sammenpakningsmønstre må i princippet kunne beskrives ved en karakteristisk længde d og en dimensionsløs funktion $F(f)$ af en række geometriske forhold f karakteristisk for den pågældende fordeling af størrelser, former og sammenpakninger. Der må derfor gælde:

$$k = d^{\alpha} \cdot \eta^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \cdot F(f), \tag{2}$$

hvor α, β og γ må vælges således, at højresiden får den rigtige dimension. Hvor en eventuel dimensionsløs talfaktor i den ukendte formel for k er indlemmet i $F(f)$.

Af (1) fremgår det, at k's dimension må være:

$$[k] = [v] \cdot \frac{[dx]}{[dP]} = \frac{L^2 T^{-1}}{M L^{-1} T^{-2}} = M^{-1} L^3 T. \tag{3}$$

Da [d] = L, $[\eta] = M L^{-1} T^{-1}$ og $[\rho] = M L^{-3}$ er det derfor tvingende, at:

$$M^{-1} L^3 T = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} L^{-\beta} T^{-\beta} \cdot M^{\gamma} L^{-3\gamma}. \tag{4}$$

Ligningen kan kun opfyldes for dimensionen T, hvis $\beta = -1$. Dette taget i betragtning, kan den kun opfyldes for dimensionen M, hvis $\gamma = 0$. Herefter kan den kun opfyldes for dimensionen L, hvis $\alpha = 2$. Hvis Darcys lov kan gøres gældende, er konstanten i den således entydigt givet ved:

$$k = d^2 \cdot \eta^{-1} \cdot F(f) \tag{5}$$

Svaret på opgaven er således, at hvis det geometriske billede af sediment 1 fremgår af det geometriske billede af sediment 2 ved at alle længder er ganget med ε, da er k for sediment 1 ε^2 gange større end k for sediment 2.

Kommentarer

1. Darcys lov, jævnfør ligning (1), fremkommer af Newtons 2. lov anvendt på en infinittesimal kasse med vand og jordpartikler i, hvor vandet dels er påvirket af det varierende tryk fra vandet uden for kassen, dels af vekselvirkningen imellem vandet og jordpartiklerne i

kassen. Idet det dels antages, at det trykfald, der skal til for at sikre accelerationen i en given vandstrømning, er forsvindende i forhold til det trykfald, der skal til for at overvinde vandets gnidningmodstand imod jordpartiklerne, dels antages, at gnidningsmodstanden kan regnes for proportional med transporthastigheden af det strømmende vand. I lærebogen i hydrologi fra DTU, som jeg i sin tid konsulterede forud for formuleringen af opgaven, blev både (1) og (5) præsenteret som rene erfaringslove. Udledninger af dem fra en mere teoretisk ramme, som gjort her, skulle man til speciallitteraturen for at finde.

2. Når jeg har afholdt breddekurset på fysikstudiet på RUC, har jeg tidligt i forløbet fremhævet dimensionsanalyse som et undertiden kraftfuldt redskab til problemløsning i fysik. Pointen hermed har været dobbelt. Dels har jeg gjort det, fordi dimensionsanalyse som sagt kan være et slagkraftigt værktøj for de studerende at have til rådighed. Somme tider – som ved opgaven her – er det endda den eneste mulige vej til problemløsning. En del af eksamensopgaverne gennem årene har tilsvarende alene – eller som en mulighed blandt flere – kunnet løses ved dimensionsanalyse. Men jeg har også fremhævet dimensionsanalysen for i større almindelighed at henlede de studerendes opmærksomhed på de både historiske og filosofiske perspektiver i, at fysikken nu om dage formulerer sig i *størrelsesligninger*.

At symbolerne i fysik repræsenterer *størrelser* kan ses som det større abstraktionsspring nummer tre i udviklingen af brugen af symboler i matematik og fysik: Det første spring fandt sted i forhistorisk tid ved overgangen fra at tale om f.eks. syv får eller syv høns til at tale om syv i al abstrakthed, således at f.eks. syv plus fem gives mening uden henvisning til hverken får eller høns. Det andet spring skete ved udviklingen af algebraen over araberne til Descartes ("*Géometrie*", 1637), hvorefter vi ikke blot har kunnet regne med tal, men også som pladsholdere for vilkårlige tal har kunnet regne med bogstaver. Altså det spring, der har styret måden vore dages matematik udtrykkes på. Endelig kan det tredje abstraktionsspring, modsvarende henvisningen til Descartes som repræsentant for det andet spring, tidsfæstes til Maxwells "Treatise of electricty and magnetism" (1873). Heri introducerer Maxwell begebet en "*fysisk størrelse*" som produktet af et tal og en enhed. Og han gør opmærksom på, at bogstavregningen i fysik kan tolkes på to måder: Bogstaverne kan, som i matematik, opfattes som pladsholdere for tal gældende for et underforstået bestemt valg af enheder. Eller de kan opfattes som pladsholdere for fysiske størrelser. Hvorved han lægger op til den senere forståelse af ligningerne imellem disse størrelser som uafhængige af valgte måleenheder, på samme måde som f.eks. ligheden imellem to længder ikke afhænger af, om de måles i meter eller alen.(Uddybning kan findes i: Jan de Boer, "Symboler og betegnelser i matematikken og fysikken", Fysisk Tidsskrift 86, 1988, No. 2).

Siden Maxwells tid bredte opfattelsen af bogstavregningen i fysik som størrelsesregning sig til hele fysiklitteraturen i løbet af små hundrede år. I megen teknisk litteratur opereres der stadig med algebraiske udtryk, hvor symbolerne står for talværdier og rigtigheden af udtrykkene hænger på brugen af bestemte enheder. Men i fysik er ligningerne nu om dage altså ikke afhængige af valgte enheder. Symbolmanipulationerne handler om produkter af tal og enheder, således at der samtidigt gennemføres parallelle regnestykker for tal og enheder. Hvor kombinationen af tal og enhed refererende til en bestemt fysisk størrelse kan vælges frit så længe produktet af tal og enhed stadig repræsenterer det samme.

I modsætning til uafhængigheden af det specifikke valg af enheder afhænger udseendet af fysikkens ligninger derimod af, hvad der anses for grundstørrelser og hvad der anses for heraf afledte størrelser. Valget af, hvad der regnes for grundstørrelser, er også afgørende for, hvilke dimensionsanalyser, der kan gennemføres.

Breddeopgave 24. Kasserollehåndtag

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1978, nr. 24 i rækken her i KVANT):

Oftest brænder man sig på pander eller kasseroller med metalhåndtag, når man fjerner dem fra ilden. Hvordan afhænger temperaturen af enden af et sådant metalhåndtag af dets længde og tykkelse? Begrund svarene.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Løsninger til små opgaver

1. Svingningstid af to fjedre.

Fjedersvingningerne antages at være harmoniske, hvor udsvinget x er godt beskrevet af Hookes lov, $F_{res} = -k \cdot x$, med fjederkonstanten $k = m \cdot \omega^2$. Svingningstiden er $T = 2\pi/\omega$ eller $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}$. Da lodderne udvider fjedrene lige meget må de to fjedre have et tilsvarende forhold mellem deres fjederkonstanter $k_1/k_2 = m_1/m_2 = 10$. Af formlen for svingningstiden ses det nu, at de to lodder må have *samme svingningstid*.

2. Tre tal i forholdene 1:2:3.

Der er fire løsninger: (219, 438, 657), (327, 654, 981), (192, 384, 576) og (273, 546, 819). Se hvordan de findes på United States Military Academy's Math Forum (26. januar 2006), www.dean.usma.edu/math/activities/potw/default.htm.