

Kvadratrod på kinesisk

Peer Jespersen

Alle de tidlige kultursamfund har kendt Pythagoras' læresætning, hvor bestemmelsen af kvadratroden af en størrelse er essentiel. Og de har alle udviklet metoder til bestemmelse af kvadratroden af en størrelse. Den kinesiske metode er interessant af flere grunde. Dels er den kinesiske metode baseret på kendskabet til kvadratsætningen, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, dels benytter kineserne 10-tals systemet, dog uden et tegn for tallet 0 (nul) og dels oversættes proceduren til en algoritme, som benyttes sammen med tællestave og -bræt.¹

Kinesisk matematik udviklede sig rigtig meget under Zhoudynastiet fra ca. 1022 til ca. 256 f.Kr. En vigtig kilde til forståelse af kinesisk matematik er værket Zhou Bi Suan Jing, som beskriver aritmetiske udregninger i forbindelse med astronomi og den kinesiske kalender. Zhou Bi Suan Jing indeholder bl.a. også et bevis for Gou Gu-sætningen, som i vesten kendes som Pythagoras' læresætning. Sætningen er illustreret på figur 1 ved en 3-4-5 trekant.



Figur 1. Xian Tu-diagrammet, hvorfra kineserne udledte Pythagoras' sætning [1]

Det kinesiske talsystem

Det kinesiske talsystem består af ni cifre; 1, 2, ..., 9:

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ud over de ni cifre, så anvender man potenser af 10:

¹ Artiklen er tidligere udgivet i LMFK-bladet.

十	百	千	万
10	10 ²	10 ³	10 ⁴

Tallet 1.024 blev skrevet ved brug af både cifrene og 10-potenserne:

一 千 二 十 四

Som det ses, så er tallet opbygget ved skrifttegnene 1 – 1.000 – 2 – 10 – 4. Bemærk, at man ikke anvender et tegn for nul, idet pladsen blot udelades. Der findes dokumenter, hvor man anvender 10-potenser med negativ eksponent.

Kvadratroden

Vi vil bestemme kvadratroden, K , af 395.641. Da

$$600^2 = 360.000 < 395.641 < 490.000 = 700^2$$

ved vi, at $600 < K < 700$. Det vil sige, at antallet af cifre i K er tre. Med andre ord, så er

$$K = 100a + 10b + c,$$

hvor $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ og $a \neq 0$. Vi kan af ovenstående slutte, at $a = 6$. Det vil sige, at

$$K = 600 + 10b + c.$$

Lad os udregne kvadratet på K :

$$\begin{aligned} K^2 &= (600 + 10b + c)^2 \\ &= 360.000 + 12.000b + 1.200c + 100b^2 + 20bc + c^2. \end{aligned}$$

Dermed får vi ligningen

$$\begin{aligned} 360.000 + 12.000b + 1.200c + 100b^2 + 20bc + c^2 \\ = 395.641 \end{aligned}$$

eller

$$1.200 \cdot (10b + c) + (10b + c)^2 = 35.641.$$

I første omgang ser vi bort fra $(10b + c)^2$ og c i den første parentes. Vi vil nu bestemme b , som det største hele tal så $12.000b \leq 35.641$.

Ved division finder vi, at $b \leq 2,97$. Det vil sige, at $b = 2$. Indsættes i ligningen ovenfor, får vi

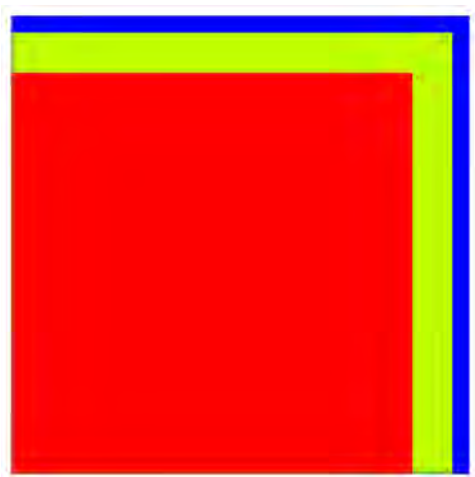
$$1.200 \cdot (20 + c) + (20 + c)^2 = 35.641$$

eller

$$c^2 + 1.240c = 11.241.1$$

Da 9 er løsning til andengradsligningen, er $c = 9$. (Der er en løsning mere, nemlig -1.249).

Kvadratroden af 395.641 bliver $K = 629$.



Figur 2. Processen med at beregne kvadratroden er illustreret ved at udfylde et kvadrat (se tekst).

Ideen

Ideen med processen er at udfylde et kvadrat med et areal svarende til radikanden, som i eksemplet er 395.641. Vi betegner roden med cifre $K = c_1c_2c_3 = 100 \cdot c_1 + 10 \cdot c_2 + c_3$.

- Først bestemmes det røde kvadrat, hvis sidelængde netop er $100 \cdot c_1$. Arealet er $10.000 \cdot c_1^2$.
- Dernæst den gulgrønne polygon og dermed c_2 , som har arealet $2.000 \cdot c_1 \cdot c_2 + 100 \cdot c_2^2$
- Til sidst bestemmes c_3 ved den blå polygon, som har arealet $2 \cdot (100 \cdot c_1 + 10 \cdot c_2) \cdot c_3 + c_3^2$.

Ikke kvadrattal

Spørgsmålet er naturligvis, om proceduren også virker, hvis vi ikke har et kvadrattal. Lad os for eksempel bestemme kvadratroden af 21. Lommeregneren giver resultatet $\sqrt{21} \sim 4,582576$.

Da $4^2 = 16 < 21 < 25 = 5^2$ kan vi i første omgang sætte $K = a + \frac{b}{10}$. Af det foregående kan vi umiddelbart konkludere, at $a = 4$. Vi ønsker at bestemme b , så

$$\left(4 + \frac{b}{10}\right)^2 \leq 21$$

Udregnes parentesen fås uligheden

$$16 + \frac{8}{10}b + \frac{1}{100}b^2 \leq 21$$

eller

$$80b + b^2 \leq 500.$$

Det største positive heltal (ciffer), som opfylder uligheden er $b = 5$. Vi kan derfor konkludere at $b = 5$. Vi har foreløbig at $K = 4,5$ og da $K^2 = 4,5^2 = 20,25 \neq 21$ fortsætter vi jagten på flere decimaler.

Vi sætter $K = \frac{9}{2} + \frac{c}{100}$, og vi ønsker nu at bestemme c således at

$$\left(\frac{9}{2} + \frac{c}{100}\right)^2 \leq 25$$

Som før udregnes parentesen, og uligheden bliver

$$\frac{81}{4} + \frac{9}{100}c + \frac{1}{10.000}c^2 \leq 25.$$

Vi får først ved reduktion, at

$$3600c + c^2 \leq 30.000$$

Det største hele tal (ciffer), som opfylder uligheden, er 8. Vi sætter dermed $c = 8$ og har nu $K = 4,58$. Da $K^2 = 4,58^2 = 20,9764$ fortsætter jagten på decimaler. Lad nu $K = 4,58 + \frac{d}{1000}$. Vi ønsker at bestemme d , så

$$\left(4,58 + \frac{d}{1000}\right)^2 \leq 21$$

Samme procedure som ovenfor giver løsningen $d = 2$. Dermed har vi, at $K = 4,582$, hvor $K^2 = 4,582^2 \sim 20,99472$.

Lad os slutte med at finde fjerde decimal. Vi sætter $K = 4,582 + \frac{e}{10000}$. I lighed med de foregående decimaler, ønsker vi at bestemme e , således at

$$\left(4,582 + \frac{e}{10000}\right)^2 \leq 21$$

Proceduren giver, at $e = 5$ har vi $K = 4,5825$.

Tællestave og -bræt

Kineserne har naturligvis ikke lavet beregningerne på papir, men har anvendt tællestavene sammen med et tilhørende tællebræt, som vist på figur 3. Den øverste række i tabellen består af forskellige potenser af 10. I felterne under placeres tællestavene i henhold til positionsværdien. For at kunne det, må proceduren omformes til en algoritme, der kan anvendes med tællestavene.

Den første observation, man må gøre, er at bestemme en sammenhæng mellem antal cifre i radikanden og antal cifre i kvadratroden.

- Hvis radikanden har et eller to cifre, så har kvadratroden ét ciffer.
- Hvis radikanden har tre eller fire cifre, så har kvadratroden to cifre.
- Hvis radikanden har fem eller seks cifre, så har kvadratroden tre cifre.
- Osv.



Figur 3. Kinesisk tællebræt [3].

Algoritme

Som eksempel vil vi bestemme kvadratroden af 817. Vi samler cifrene i radikanden to og to, jævnfør observationen ovenfor. Det vil sige 08 og 17. Da vi har to grupper består kvadratroden af to cifre.

		100	10	1	1/10	1/100
Kvadratrod	**					
Radikand	817					

Det største kvadrattal mindre end eller lig 08 er $4 = 2^2$. Dermed er det første ciffer i kvadratroden 2. Vi indsætter 2 på pladsen for 10'erne i rækken for kvadratrod.

Dernæst trækkes kvadratet $4 = 2^2$ fra radikanden. Da 2 er en 10'er, så er 4 en 100'er.

		100	10	1	1/10	1/100
Kvadratrod	2-					
Radikand	817					
$20^2 = 400$						
Differens	417					

For at bestemme næste ciffer udføres følgende mellemregning på et hjælpebræt:

Vi tager det dobbelte af den kvadratrod, vi har bestemt, og opstiller uligheden, hvor vi skal bestemme det største tal, der kan stå på den ledige plads (*), så

$$(4*) \cdot * \leq 417.$$

Da $(40 + 8) \cdot 8 = 384$ og $(40 + 9) \cdot 9 = 441$ er næste ciffer 8:

		100	10	1	1/10	1/100
Kvadratrod	28					
Radikand	817					
$20^2 = 400$						
Differens	417					
$40 \cdot 8 + 8^2 = 384$						
Differens	33					

For at bestemme næste ciffer tilføjer vi 00 til vores differens, hvert ciffer i kvadratroden svarer til to cifre i radikanden. Vi har således 3300. Det dobbelte af vores kvadratrod er $2 \cdot 28 = 56$. Det næste ciffer bestemmes ved uligheden

$$(56*) \cdot * \leq 3300.$$

Da $(560 + 5) \cdot 5 = 2825$ og $(560 + 6) \cdot 6 = 3396$ er næste ciffer 5.

		100	10	1	1/10	1/100
Kvadratrod	28,5					
Radikand	817					
$20^2 = 400$						
Differens	417					
$40 \cdot 8 + 64 = 384$						
Differens	33					
$(560 + 5) \cdot 5 = 2825$						
Differens	475					

Igen gennemføres vores mellemregning. Det dobbelte af 285 er 570, og vi skal nu løse

$$(570*) \cdot * \leq 47.500.$$

Da $(5700 + 8) \cdot 8 = 45.664$ og $(5700 + 9) \cdot 9 = 51.381$ er næste ciffer 8.

		100	10	1	1/10	1/100
Kvadratrod	28,58					
Radikand	817					
$20^2 = 400$						
Differens	417					
$40 \cdot 8 + 64 = 384$						
Differens	33					
$565 \cdot 5 = 2825$						
Differens	475					

Dermed er kvadratroden af 817 med to decimaler 28,58. Proceduren kan fortsættes, indtil vi synes, at der er decimaler nok.

En moderne lommeregner giver med to decimaler, at $\sqrt{817} \sim 28,58$.

Kubikrod

Lad os bestemme kubikroden af 1.860.867. Princippet er det samme, som blev anvendt ved kvadratroden, men i 3D. Det vil sige, at vi har en terning, som skal udfyldes.

		10^6	10^5	10^4	10^3	100	10	1
Kubikrod								
Radikand	1.860.867							

Vi inddeler radikanden i grupper af tre cifre. Vi har dermed tre grupper, nemlig 001, 860 og 867. Dette betyder også, at kubikroden har tre cifre. Det største kubiktal mindre end eller lig med 001 er $1^3 = 1$. Det vil sige, at første ciffer i kubikroden er 1:

		10^6	10^5	10^4	10^3	100	10	1
Kubikrod								
Radikand	1.860.867							
1^3								
Differens								

For at bestemme næste ciffer udregnes først

$$3 \cdot 12 = 3 \text{ og } 3 \cdot 1 = 3,$$

hvor 1-tallet er kubikrodens første ciffer. Dernæst skal vi bestemme, hvilket ciffer, der skal stå på – for at løse uligheden:

$$(3 \cdot 100 + (3*) \cdot *) \cdot * \leq 860, ,$$

hvor det første 3-tal stammer fra $3 \cdot 12$ og det andet 3-tal stammer fra $3 \cdot 1$. Første gæt er 2, da

$$\frac{860}{300} = \frac{43}{15} \sim 2,866667.$$

Indsættes 2 fås

$$(300 + 32 \cdot 2) \cdot 2 = 728.$$

Indsættes 3 i stedet fås

$$(300 + 33 \cdot 3) \cdot 3 = 1197,$$

som er for stort. Andet ciffer er derfor 2.

		10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	100	10	1
Kubikrod						I	II	
Radikand	1.860.867	I	III	T		III	T	II
	1 ³ = 3	I						
Differens			III	T		III	T	II
	(300 + 32 · 2) · 2 = 728		II	III				
Differens	132.867		I	III	II	III	T	II

Differensen er 132.867. Vi gennemfører vores beregning igen:

$$3 \cdot 12^2 = 432 \text{ og } 3 \cdot 12 = 36,$$

Vi skal – som før – bestemme hvilket ciffer, der skal stå på * i uligheden

$$[43.200 + (36 \cdot *)] \cdot * \leq 132.867.$$

Vores gæt er 3, da

$$\frac{132.867}{43.200} = \frac{4.921}{1.600} \sim 3,075625.$$

Indsættes 3 i ulighedens venstre side fås

$$[43.200 + (363 \cdot 3)] \cdot 3 = 132.867..$$

Da udtrykket netop er lig ulighedens højre side, er 3 det sidste ciffer.

		10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	100	10	1
Kubikrod						I	II	III
Radikand	1.860.867	I	III	T		III	T	II
	1 ³	I						
Differens			III	T		III	T	II
	728		II	III				
Differens			I	III	II	III	T	II
	132.867		I	III	II	III	T	II
Differens								

Litteratur

- [1] www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2015/Pythagoras.html
- [2] De kinesiske tegn for tallene er hentet fra [en.wikibooks.org/wiki/Chinese_\(Mandarin\)/Numbers](http://en.wikibooks.org/wiki/Chinese_(Mandarin)/Numbers)
- [3] Billedet er lånt fra A. Volkov og V. Freiman (2018) "Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators", Springer, ISBN 978-3-319-73394-4.



Peer Jespersen er kandidat i matematik og datalogi fra Aarhus Universitet (1979) og har undervist på erhvervsakademier, ingeniørhøjskoler og gymnasier samt arbejdet i den private sektor. I dag er han pensionist med interesse for historisk matematik. Han er forfatter til "Elementer af matematikkens historier" (udkommer på LMFK-forlaget) og er ved at færdiggøre "Den græske matematik". Han undersøger nu kinesisk matematik.

Landskoordinaterne

Leif Kahl Kristensen

Geo-metri eller jord-måling blev udviklet i Ægypten til at afsætte skel efter oversvømmelserne og beregne arealer som beskatningsgrundlag. Ved stavnsbåndets ophævelse blev disse problemer aktuelle her i landet, og det vises hvordan de løses i dag. Det illustreres, at folk med indflydelse ikke altid har indsigt, men gør tingene unødvendigt besværlige og kostbare.

Gradmålingen

Den Danske Gradmåling gav vigtige bidrag til bestemmelsen af Jordens størrelse. Den blev oprettet 1816 af H.C. Schumacher, som var direktør for Observatoriet

på Rundetaarn. Han havde fået fondsbevilling til at lave to trianguleringskæder: en fra Elben til Skagen og en fra København til vestkysten. De blev markeret med postamenter (figur 1). Efterhånden blev de bredt over