For at bestemme næste ciffer udregnes først

$$3 \cdot 12 = 3 \text{ og } 3 \cdot 1 = 3,$$

hvor 1-tallet er kubikrodens første ciffer. Dernæst skal vi bestemme, hvilket ciffer, der skal stå på – for at løse uligheden:

$$(3 \cdot 100 + (3*) \cdot *) \cdot * \leq 860, ,$$

hvor det første 3-tal stammer fra $3 \cdot 12$ og det andet 3-tal stammer fra $3 \cdot 1$. Første gæt er 2, da

$$\frac{860}{300} = \frac{43}{15} \sim 2{,}866667.$$

Indsættes 2 fås

$$(300 + 32 \cdot 2) \cdot 2 = 728.$$

Indsættes 3 i stedet fås

$$(300 + 33 \cdot 3) \cdot 3 = 1197,$$

som er for stort. Andet ciffer er derfor 2.

		10^6	10^5	10^4	10^3	100	10	1
Kubikrod						𝍠	𝍡	
Radikand	1.860.867	𝍠	𝍧	𝍥		𝍧	𝍥	𝍦
$1^3 = 3$		𝍠						
Differens			𝍧	𝍥		𝍧	𝍥	𝍦
$(300 + 32 \cdot 2) \cdot 2 = 728$			𝍦	𝍡	𝍧			
Differens	132.867		𝍠	𝍢	𝍡	𝍧	𝍥	𝍦

Differensen er 132.867. Vi gennemfører vores beregning igen:

$$3 \cdot 12^2 = 432 \text{ og } 3 \cdot 12 = 36,$$

Vi skal – som før – bestemme hvilket ciffer, der skal stå på * i uligheden

$$[43.200 + (36 * \cdot *)] \cdot * \leq 132.867.$$

Vores gæt er 3, da

$$\frac{132.867}{43.200} = \frac{4.921}{1.600} \sim 3{,}075625.$$

Indsættes 3 i ulighedens venstre side fås

$$[43.200 + (363 \cdot 3)] \cdot 3 = 132.867..$$

Da udtrykket netop er lig ulighedens højre side, er 3 det sidste ciffer.

		10^6	10^5	10^4	10^3	100	10	1
Kubikrod						𝍠	𝍡	𝍢
Radikand	1.860.867	𝍠	𝍧	𝍥		𝍧	𝍥	𝍦
	1^3	𝍠						
Differens			𝍧	𝍥		𝍧	𝍥	𝍦
	728		𝍦	𝍡	𝍧			
Differens			𝍠	𝍢	𝍡	𝍧	𝍥	𝍦
	132.867		𝍠	𝍢	𝍡	𝍧	𝍥	𝍦
Differens								

Litteratur

[1] www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2015/Pythagoras.html

[2] De kinesiske tegn for tallene er hentet fra en.wikibooks.org/wiki/Chinese_(Mandarin)/Numbers

[3] Billedet er lånt fra A. Volkov og V. Freiman (2018) “Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators”, Springer, ISBN 978-3-319-73394-4.

Peer Jespersen er kandidat i matematik og datalogi fra Aarhus Universitet (1979) og har undervist på erhvervsakademier, ingeniørhøjskoler og gymnasier samt arbejdet i den private sektor. I dag er han pensionist med interesse for historisk matematik. Han er forfatter til “Elementer af matematikkens historier” (udkommer på LMFK-forlaget) og er ved at færdiggøre “Den græske matematik”. Han undersøger nu kinesisk matematik.

Landskoordinaterne

Leif Kahl Kristensen

Geo-metri eller jord-måling blev udviklet i Ægypten til at afsætte skel efter oversvømmelserne og beregne arealer som beskatningsgrundlag. Ved stavnsbåndets ophævelse blev disse problemer aktuelle her i landet, og det vises hvordan de løses i dag. Det illustreres, at folk med indflydelse ikke altid har indsigt, men gør tingene unødvendigt besværlige og kostbare.

Gradmålingen

Den Danske Gradmåling gav vigtige bidrag til bestemmelsen af Jordens størrelse. Den blev oprettet 1816 af H.C. Schumacher, som var direktør for Observatoriet på Rundetaarn. Han havde fået fondsbevilling til at lave to trianguleringskæder: en fra Elben til Skagen og en fra København til vestkysten. De blev markeret med postamenter (figur 1). Efterhånden blev de bredt over hele landet. Schumacher havde endvidere foreslået C. F. Gauss at føre sine trianguleringer fra Gøttingen til Elben. Udjævningen, der gav punkternes geografiske bredde og længde regnet fra Rundetaarn (12°34’40” øst), blev først afsluttet 1878 af C.C.G. Andræ [1]. Vinklerne blev genmålt flere gange – sidst mellem 1978-92 [2]. Da General Staben overtog kortlægningen af topografiske kort blev postamenterne brugt som førsteordens punkter for forskellige projektioner.

Figur 1. Postament for førsteordens punkter af granit ved Kongsbjerg / Lisbjerg nær Aarhus. Den synlige del rager ca. 1 m op over jordoverfladen og er forsynet med fredningsplade. Den underjordiske del er nedstøbt i et betonfundament på 1 m^3. Stationscentret er afmærket ved et hul i en messingbolt nedfæstet i stenens top. Foto: Wikipedia.

System 1934

Siden dannelsen af “Praktiserende Landinspektørers Forening” (PLF) i 1870 var det deres ønske at få et tæt net af anden- og tredjeordens fikspunkter til lokale målinger. Med indførelsen af stålbånd og teodolit var nøjagtigheden også blevet stærkt forøget. En L meter lang linje kunne nu måles med en middelfejl på 0,0020$\cdot\sqrt{L(\mathrm{m})}$. For L = 25 m – typisk for de utallige elementer lokale målinger består af – fås middelfejlen 1,0 cm. Ønsket blev først opfyldt efter dannelsen af Geodætisk Institut under professor N.E. Nørlund, som deltog i trianguleringen omkring Baltikum og ville forenkle beregningerne i kortplanen. Det var sædvane at bruge Legendres teorem, som reducerede vinklerne i en sfærisk trekant med en tredjedel af den sfæriske exces[2], og tilnærmede en konform (vinkeltro) afbildning i planen. Meridianen 2°12’ vest for Rundetaarn var brugt af General Staben til en konform kegleprojektion (Lambert) som tangerede 56° nord og dannede grundlaget for hærkort i 1:20.000 og mindre. Forvanskningen kunne blive 1:3000 og var for meget for matriklen og tekniske kort.

Landet blev derfor af Store Bælt delt i Jylland/Fyn og Sjælland, som fik hver sin “Transverse Mercator” (TM) projektion defineret ved retnings- og afstandskorrektionerne, som blev stærkt forenklet. Ellipsoiden blev erstattet med to Gauss kugler med radier bestemt på middelbredden af den internationale ellipsoide. Agri Bavnehøjs koordinater blev ansat til $X = Y = 200$ km og retningen til Lysnet ansat til Andræs værdi. Dette “System 1934” (S34) blev grundlaget for anden- og tredjeordens punkterne i S34 (figur 2–3).

Figur 2. Andenordens fikspunkt i jordoverfladen over en nedsat betonblok. Knoppen under koordinatmærket giver højdekoten. Stationscentret er hullet i midten af kalotten. Fra Klitmøller. Foto: Wikipedia.

Figur 3. Tredjeordens fikspunkt centreret i bronzeplade i jordhøjde over nedsat betonblok. Stationscentret er centret af bronzepladen. Fra toppen af Jernhatten på Djursland. Foto: Wikipedia.

UTM og GPS

Omkring 1955 blev de topografiske kort – efter et ønske fra NATO – omlagt til “Universal Transverse Mercator” (UTM), der deler hele Jorden i 60 zoner på 6°, der nummereres mod øst. Det meste af Danmark ligger i zone 32, som strækker sig fra 6° til 12° øst for Greenwich, men ekstrapoleres ind i Sverige på danske kort. Centralmeridianen er 9° øst. S34 blev transformeret til UTM(ED50) ved potensrækker.

Da der var planer om at omlægge de 16.000 matrikelkort på papir til et digitalt matrikelkort var PLF igen aktiv for at få forbedringer af fikspunkterne udliciteret til medlemmerne [3]. Fikspunkterne i S34 blev forbedret i perioden 1978–92 [2] og kortene blev digitaliseret

[2] På en kugle er vinkelsummen i en trekant 180° + ϵ, hvor ϵ (epsilon) betegnes “sfærisk exces”. Hvis R er kuglens radius er trekantens areal $\epsilon \cdot R^2$.

i 1990–97. Med brugen af GPS blev fikspunkterne forbedret til UTM(EUREF89). For Jylland/Fyn er der 26.062 punkter som forbindes med polynomier af 13. grad ved mindste kvadrater. Der er 210 frie parametre og standardafvigelsen er 1,6 cm. S34 blev redefineret ved denne procedure og brugt til transformation af 13 millioner skelpunkter. Hvert af disse 210 led ændrer retnings- og afstandskorrektionerne, så systemet kan ikke bruges over større afstande. De gør også beregningerne længere – det ville have været lettere at bruge retningen og afstanden til Mekka som nye koordinater.

Det digitale matrikelkort

Allerede ved oprettelsen af "Kort og Matrikel Styrelsen" (KMS) i 1989 var det på tale at digitalisere matrikelkortene. I "Rådet for Danmarks Geografiske Referencenet" (Rådet) var valget af kortprojektion et vigtigt emne. Der synes tre muligheder: 1) Det redefinerede S34, som kun afveg 1–2 cm fra originalen. 2) UTM som krævede afstandskorrektioner på op til 40 cm/km og 3) en ny "Kortprojektion 2000" (Kp2000) med meridianerne 9,5° og 12.,0° øst. Her er forvanskningen mindre end 5 cm/km, men TM kræver radikale omlægninger, da nulpunktet flyttes til ækvator. De forskellige brancher havde forskellige præferencer: Statsinstitutioner og amter med trafik til lands, søs og luften, lande grænser, miljø og militær som område valgte UTM. Kommuner, landinspektører, entreprenører og især ledningsejerne, som arbejder med de mange lokale data, var skeptiske. Først da KMS lovede ledningsejerne at transformere frem og tilbage mellem UTM og S34, enes man om UTM. Jeg havde nogle andre forslag, men referaterne fra Rådets møder viser, at de aldrig blev realitetsbehandlet [4].

Forbedring af S34

Ca. 60 førsteordens punkter transformeres fra UTM-koordinaterne N og E til landskoordinaterne X og Y konformt ved komplekse funktioner. Definer:

$$z = (62{,}35 - N) + i \cdot (E - 5{,}30) \qquad (1)$$

hvor $i = \sqrt{-1}$ og alle enheder er 100 km, så 5. decimal er meter:

$$\begin{aligned} -Y - iX = {} & (-2{,}03577102 - i2{,}65216685) \qquad (2)\\ & +(+1{,}00014333 - i0{,}02000296) \cdot z\\ & +(+0{,}00000075 + i0{,}00003708) \cdot z^2\\ & +(+0{,}00000003 + i0{,}00000082) \cdot z^3 \end{aligned}$$

Ovenstående 8 koefficienter [5, side 56] er elementer i en mindste kvadraters udjævning af førsteordens punkterne, som hver giver to uafhængige lineære iagttagelsesligninger. Middelfejlen bliver ca. 20 cm og kan forklares ved observationsfejlene i 1934. Det konstante led giver udviklingspunktets tilnærmede koordinater: X = 265.217 m, Y = 203.577 m. Meridianen i S34 er 12°34'40" – 2°12' = 10,38° og for UTM 9,00° øst for Greenwich. I kortplanen giver det en drejning: (10,38-9,00) $\cdot \sin 56°$ = 1,144° = 0,020 rad, som er andet led ovenfor. Tredje og fjerde led giver rækkeudviklingen af denne drejning. En forskydning og drejning på grund af pladetektonik tager de to første led sig også af – en deformation derimod ikke, men den bidrager til middelfejlen. Lad B betegne afstanden til en linje med retningsvinkel A:

$$X \cdot \sin A - Y \cdot \cos A - C = B. \qquad (3)$$

Området $B > 0$ definerer en halvplan, som vi nu antager skubbet en konstant værdi B på grund af et brud i de tektoniske plader. Det ændrer postamentets komplekse koordinater til:

$$(X - B \cdot \sin A) + i(Y - B \cdot \cos A) \qquad (4)$$

Medtages denne betingelse i udjævningen og løses for B bliver middelfejlen altid mindre. Hvis vi erstatter B med $\mu \cdot B$ fås en affinitet, som ofte bruges til at korrigere papirkorts krympning.

De 26.062 anden- og tredjeordens punkter burde udjævnes for sig i en stor samlet udjævning baseret på de utallige målinger af korte afstande i marken med fejl på 1–2 cm niveau. Fejlophobningen vil give lokale drejninger, som imidlertid modelleres af formlen. I princippet kunne aflæsningerne af de utallige målinger med stålbånd tilpasses, så residuerne blev eksakt 0, men i praksis er det tilstrækkeligt de er 1–2 cm. Tilføjelsen af nye variable vil altid reducere middelfejlen og bestemme dem, hvis de er mærkbare. Det vil give nye værdier for de 8 koefficienter og reducere middelfejlen til ovennævnte 1,6 cm. Vi vil imidlertid redefinere S34 ud fra UTM(EUREF89) ved formel (2). S34 er kun defineret i Danmark og har X i intervallet 175–475 km. Forvekslinger kan undgås ved i det nye system at erstatte X med $1000 - X$, som regnes positiv mod øst og bliver et højre-system.

Lokale målinger

Med centralpunktet nær Silkeborg er Jylland/Fyn dækket af Taylorrækken til yderområderne i Skagen og Langeland, hvor z = 1,65. Her giver det kvadratiske led et bidrag til X på $1{,}65^2 \cdot 3{,}708 = 10$ m, som ikke kan ignoreres. Vi udvikler derfor i potenser af $z + dz$, hvor dz ligger indenfor en cirkel med radius 2 km. De kvadratiske led bliver derfor $3{,}708 \cdot 0{,}02^2 = 1{,}5$ mm og $3 \cdot z \cdot 0{,}02^2 = 2{,}0$ mm. Hvis fikspunkterne er jævnt fordelt skulle der være omkring 15–20 indenfor 2 km – rigeligt til lokalt at regne lineært.

Det Digitale Matrikelkort indeholder omkring 13 millioner skelpunkter svarende til omkring 130.000 i hver kommune og her er de simple lineære regninger en stor fordel. Et lokalt system indordnes i landssystemet ved at måle mindst 3–4 fikspunkter. Udjævningen sker ved at danne tyngdepunktet med vægt omvendt proportionalt med kvadratet på middelfejlen. Så findes retning og afstand fra tyngdepunktet til de enkelte punkter som vægtes yderligere med kvadratet på afstanden. Herefter midles korrektionerne til retning og målestok.

En stor fordel ved de små korrektioner er, at fejl straks springer i øjnene. Et vist ikke helt fiktivt eksempel er: Der skal lægges en jernbane til en lufthavn. De store afstande kræver planlægning i Kp2000, men omregnes til S34 for at se bygninger og anden infrastruktur på linjen. Lufthavnen bruger imidlertid lokale koordinater fra før revisionen. Skinner og perron passer derfor ikke sammen og det opdages først efter arbejdet påbegyndes. Den slags problemer løses vistnok i Højesteret.

Konklusion

KMS vedtog at redefinere S34 ved potensrækker af 13. grad og 210 led, som hvert ændrede retnings- og afstandskorrektionerne, så S34 ikke kan bruges over længere afstande. Referaterne fra debatten i "Rådet for Danmarks Geografiske Referencenet" viser, at mine forslag om at forbedre S34 med små korrektioner ikke blev behandlet. De kunne have sparet samfundet for meget besvær og kostbare omlægninger [6]. Der argumenteres kraftigt mod at indføre for mange systemer, men ironisk nok indfører KMS DKTM kort tid efter med centralmeridianerne 9° og 10° overlappende systemer, der gør Jylland/Fyn ret kaotisk.

Litteratur

[1] L.K. Kristensen (2004) "Retvinklede koordinaters historie", *Landinspektøren*, Nr. 1, side 34–42.

[2] O. Jacobi (2008) "Skal System 34 pensioneres?", *Landinspektøren*, Nr. 1, side 10–13.

[3] A.S. Kristensen (2006) "Historien om det digitale matrikelkort (1989-93)", *Landinspektøren*, Nr. 2, side 82–87.

[4] L.K. Kristensen (2006) "Overgangen fra S34 til EUREF89", *Landinspektøren*, Nr. 2, side 71–74.

[5] L.K. Kristensen (2021) "Hvilke kortprojektioner bruges i dag?", *Trafik & Veje*, April, side 54–56.

[6] A.S. Kristensen (2004) "Fremtidens reference systemer (debat)", *Landinspektøren*, Nr. 1, side 43–46.

Leif Kahl Kristensen er mag.scient. og lektor emeritus fra Aarhus Universitet og var i 1961 den første kandidat i teoretisk fysik fra Det fysiske Institut. Arbejdede i en årrække med almindelig relativitetsteori og bidrog til Astronmischen Rechen-Instituts (Heidelberg) forbedring af fiksstjerne positioner. Det har mange ligheder med geodæsi.

Overfladespænding – breddeopgave 112 og 113 med didaktiske kommentarer

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Her bringes løsninger og kommentarer til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var disse breddeopgaver (nr. 112 og 113 her i Kvant):

Figur 1. Appelsiner og citroner. Foto: Wikimedia Commons.

Breddeopgave 112 og 113. Overfladespænding

En vanddråbe svinger imellem at være appelsinformet og citronformet (figur 1). Hvordan afhænger svingningstiden af dråbens størrelse? Begrund svaret.

Ved elektrostatisk maling sprøjtes små dråber maling påført elektriske ladninger mod det jordede metalemne, der skal males. For meget påført ladning på en dråbe fører til, at den eksploderer. Hvordan afhænger den maksimale ladning, en dråbe kan eksistere med uden at eksplodere, af dråbens størrelse? Begrund svaret.

Løsninger

1. Når den svingende vanddråbe er appelsinformet, eller når den er citronformet, er dens potentielle energi øget i forhold til, når den er kugleformet. Til gengæld har den, til forskel fra, hvis den ikke svingede, kinetisk energi, når den er kugleformet. Den svingende regndråbes øgede energi svinger mellem at være potentiel energi i de to yderformer og kinetisk energi, når dråben er kugleformet. Da den potentielle energi afhænger af vandets overfladespænding γ, og den kinetiske energi afhænger af vandets densitet ρ, må svingningstiden τ derfor være en funktion af γ og ρ, udover af dråbens radius r. Idet vi regner vandet for usammentrykkeligt, er det svært at komme i tanke om andre styrende