Opgave-hjørnet - Vipning af flyvemaskine og diskussion af relativistisk tyngdepunktsforskydning

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra sidste nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (fra sommereksamen 2000, nr. 20 i rækken i KVANT):

20. Vipning af flyvemaskine

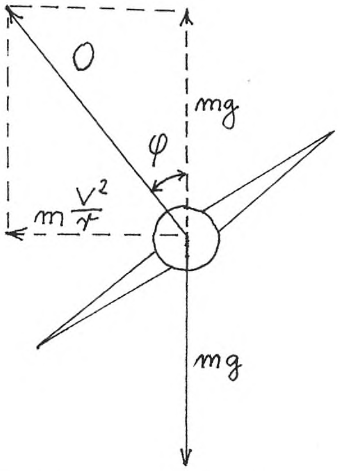
Hvorfor hælder/vipper en flyvemaskine ved kursændring? Hvordan hænger vipningen og kursændringen sammen? Begrund svarene.

Løsning

En ligeud flyvende flyvemaskine holdes oppe af en opdriftkraft vinkelret på planet udspændt af vingerne og flyets krop. Opdriftkraften skyldes trykfordelinger omkring flyet i sammenhæng med luftstrømningerne omkring flyet. Når flyet vipper følges systemet af luftstrømme og fly ad. Derfor vipper opdriftkraften, O, også, således at den får en vandret komposant. Og det er denne vandrette komposant, der sørger for kursændringen. Uden vipning ingen vandret komposant af opdriftkraften og ingen kursændring. Derfor vipper en flyvemaskine ved kursændring.

Forudsættes det, at flyet holder højde under kursændringen, så må opdriftkraftens lodrette komposant være lig med og modsat rettet tyngdekraften. Kaldes flyets fart v, krumningsradius af dets banekurve under kursændring r og flyets masse m, må opdriftkraftens vandrette komposant være lig med $m \cdot v^2/r$. Af figuren ses da, at sammenhængen mellem vipningen (givet ved vinklen ϕ) og kursændringen (udtrykt ved r) er:

$$\tan\phi = v^2/(r \cdot g) \qquad (1)$$



Figur 1. Sammenhængen mellem vipning og kursændring.

Kommentar

Den opgave fra den forudgående undervisning på breddemodulkurset, der i min optik er mest beslægtet med flyvemaskineopgaven, er:

Hvor stor hældning skal en motorvej anlægges med i en kurve? Begrund svaret.

Denne opgave er i mere udfoldede former almindeligt forekommende i mekaniklærebøger. Den har i den åbne formulering her også været stillet ved den første breddemoduleksamen sommeren 1976. En af fordelene ved, at breddemoduleksamen på RUC er uden hjælpemidler, er, at vi ikke er forhindret i også at stille centrale standardopgaver, som vi ville være, hvis lærebøgerne måtte medbringes til eksamen.

Den optimale hældning af en motorvej i en kurve er den, der kan tvinge en bil sikkert rundt i kurven, selvom vejen er isbelagt, dvs. selvom gnidningskraften fra vejen på bilen, parallel med vejbanen og vinkelret på bilens køreretning, er tilnærmelsesvis nul. I dette tilfælde er flyvemaskinens og bilens kursændringer helt analoge fænomener. Den ovenstående figur for involverede kræfter og kraftkomposanter for en flyvemaskine ved kursændring kan overtages for bilen i den isglatte motorvejskurve alene ved at erstatte opdriftkraften O med normalreaktionen N fra vejen på bilen. Og svaret på hvor stor en hældning (udtrykt ved vinklen ϕ) en motorvej skal anlægges med i en kurve (karakteriseret ved kurvens krumningsradius r) er derfor også givet ved ligning (1).

Ved eksamen var det imidlertid kun i 3 ud af 11 af besvarelserne af flyvemaskineopgaven, at der argumenteredes på den analoge måde til den måde, de fleste ville besvare motorvejsopgaven på. Blandt de øvrige besvarelser var mange præget af vanskelige overvejelser over, hvordan et fly bærer sig ad med at vippe, som en (ikke gennemførlig) vej frem mod at besvare spørgsmålet om sammenhængen mellem vipning og kursændring. Der tænkes altså i årsager og deres virkninger. Hvorimod der i min ovenstående og de 3 af besvarelserne tænkes i den lovmæssighed, at cirkelbevægelse og centripetalkraft hænger sammen. Og en sådan lovmæssighedsstyret tankegang er åbenbart mere abstrakt og krævende end en tankegang, der efterforsker mekanismer. Det abstrakte i analogien gjorde det svært for flertallet af de studerende at overføre deres erfaringer fra motorvejsopgaven til flyopgaven. Formentlig ville de f.eks. have haft nemmere ved at overføre erfaringerne til den udvidede motorvejsopgave at bestemme den tværgående gnidningskraft fra vejen på bilen, når bilens hastighed ikke er afstemt efter motorvejshældningen. Selvom denne opgave er mere teknisk besværlig end flyopgaven og kræver en anden slags tegning af indgående kræfter end på figuren, så handler den om fænomener og mekanismer i lige forlængelse af den første motorvejsopgave. Hvis bilen f.eks. kører ind i motorvejskurven med for lav fart vil de fleste jo fornemme, at den vil skride sidelæns ned af vejbanen, hvis ikke dæk og vej griber fat i hinanden, så det forhindres. Man vil fornemme vejgrebet/gnidningskraften som en reaktion på skridningstendensen. I modsætning hertil er der ikke tilsvarende fornemmelser at støtte sig til ved behandling af flyproblemet. Her er man alene overladt til abstrakt fysikertankegang.

Didaktiske overvejelser

Kirsten Ringgaard Jensen har behandlet den pointe, jeg forsøger at skitsere her, i et nyligt speciale fra RUC med titlen "Fysiske forklaringer i undervisning" (IMFUFA tekst nr. 425). Hun gør opmærksom på, at faget fysik betjener sig af to væsensforskellige slags forklaringer. Dels hvad hun, med henvisning til den bredere erkendelsesteoretiske/filosofiske litteratur, kalder *nomologiske forklaringer*. Og dels hvad hun kalder *kausale forklaringer*. Ved en nomologisk forklaring (ordet nomos er fra græsk og betyder regel eller lov) består forklaringen af et fænomen i at redegøre for, hvordan fænomenet er udtryk for gennemsætningen af en overordnet lovmæssighed under de foreliggende omstændigheder. Ved en kausal forklaring (ordet kausal er fra latin og betyder årsagsbestemt) består forklaringen af et fænomen i at redegøre for, hvad i de foreliggende omstændigheder der forårsager fænomenet. Selvom der oftest ved forklaringer i fysik er tale om et miks af de to forklaringstyper, er det didaktisk set vigtigt for fysikundervisere at gøre sig forskellen klar. Og at de går i dialog med deres elever og studerende om forskellen. Fordi kausale forklaringer tilsyneladende er nemmere fordøjelige end nomologiske forklaringer for elever og studerende.

Som illustration af forskellen mellem nomologiske forklaringer og kausale forklaringer benytter KRJ bl.a. den første i denne række af breddeopgaver (i KVANT nr. 1, marts 2000, side 24):

Hvor stor er kraften mellem fod og pedal i forhold til gnidningskraften mellem vej og dæk ved cykling? Begrund svaret.

En nomologisk orienteret måde at besvare denne opgave på kører af et spor, der kunne se sådan ud: En del af den løbende sænkning af cyklistens indre energi går til arbejde på pedalen. Den anden del af sænkningen går til varmeafgivelse fra cyklisten til først og fremmest luften. Delen af sænkningen i cyklistens indre energi, der går til pedalarbejde, må på grund af energibevarelse for cykel, cyklist og omgivelser under et være lig med den ydre genererede energi. (Udover cyklistens direkte opvarmning af omgivelserne). Uanset om denne ydre energi har form af øget energi i den omgivende luft ved overvindelse af luftmodstand, af øget potentiel energi ved kørsel op ad bakke eller af øget kinetisk energi ved acceleration. På den anden side må den ydre genererede energi ifølge mekanikkens arbejdssætning også være lig med gnidningskraftens arbejde på cykel plus cyklist, forudsat der ikke finder energiophobning sted i cyklen. Gnidningskraftens arbejde og pedalkraftens arbejde er altså lige store. Opgaven løses herefter hurtigt ved at sætte pedalkraft gange pedalflytning lig med vejkraft gange cykelflytning som vist i KVANT nr. 1, marts 2000, side 26.

En kausalt orienteret måde at løse opgaven på kører af et spor, der kunne se sådan ud: Først ses på systemet pedal plus forreste tandhjul plus et stykke af kæden. Ved at udnytte, at det samlede kraftmoment på systemet må være nul, udregnes sammenhængen mellem pedalkraft og kædetræk. Ved at udnytte, at den samlede kraft på kædestykket mellem forreste og bagerste tandhjul må være nul, har vi herefter kædetrækket på bagerste tandhjul. Ved at udnytte, at det samlede kraftmoment på systemet baghjul plus det bagerste tandhjul plus et stykke af kæden må være nul, findes sammenhængen mellem kraften fra vejen på baghjulet og kædetrækket. Og dermed sammenhængen mellem vejkraft og pedalkraft.

Det var den første, nomologisk orienterede opgavebesvarelse jeg havde i tankerne, da jeg stillede opgaven til eksamen. Og det er også denne måde jeg har besvaret opgaven på i KVANT. Ved eksamen var der imidlertid ingen af de 11 besvarelser, der fulgte dette spor, styret af energibevarelse. Alle forfulgte med større eller mindre held det andet, kausalt orienterede spor, styret af kausalkæden (undskyld!): Først er der foden, der trykker. Det får så tandhjulet til at dreje. Og det får kæden til at strammes. Hvilket igen får det andet tandhjul og baghjulet til at dreje. Endelig udvirker det gnidningskraften mellem vej og dæk.

For så vidt angår cykelopgaven er den kausalt orienterede løsningsstrategi lige så god som min nomologisk orienterede. Den kausale giver en smule flere mellemregninger end den nomologiske, men er klart gennemførlig. Det er jo imidlertid ikke altid, at et kausalt ræsonnement er gennemførligt, fordi der findes et nomologisk ræsonnement, som er det. F.eks. er det ikke tilfældet i flyopgaven. Hverken jeg eller KRJ drager derfor den slutning af elevers og studerendes større vanskeligheder med nomologiske forklaringer end med kausale forklaringer, at nomologiske forklaringer skal undgås i undervisningen. Tværtimod er demonstrationen af nomologiske forklaringer et tilbud, som specielt faget fysik er særligt leveringsdygtig i. Det er fremfor andre fag først og fremmest i fysik, at der kan sættes fokus på, at det at forstå ikke kun er et spørgsmål om at kende til mekanismer, men også at indse lovbundetheder. Og den indsigt har betydning for såvel elevers og studerendes kognitive udvikling, som for deres omverdensforståelse og deres selvforståelse.

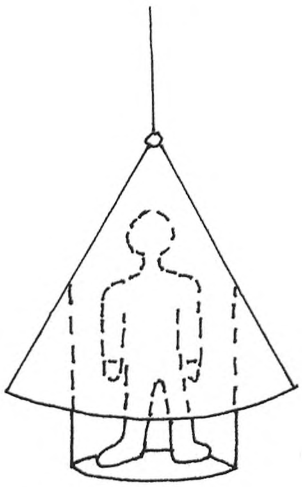
Men det er vigtigt, at såvel underviserne som deres elever eller studerende er opmærksomme på, at det måske også netop er de nomologiske forklaringer, der gør fysik til et svært fag.

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje denne breddeopgave (fra sommereksamen 1997, nr. 21 i rækken i KVANT):

21. Dykkerklokke

I 1628 kæntrede det svenske flagskib Wasa på sin jomfrurejse i Stockholms havn og sank på 30 m's dybde. Inden dets nøjagtige position gik i glemmebogen i ca. 300 år lykkedes det i 1664 at bjerge 53 af skibets kostbare bronzekanoner. Ved bjergningen benyttedes dykkerklokker, der i princippet så ud som antydet på figuren, dvs. som et omvendt kræmmerhus i et tov og med et påhægtet ståbrædt under det.

Hvor højt stod vandet i klokken, når den var sænket ned ved siden af vraget? Begrund svaret.



Figur 2. Dykkerklokke.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Relativistisk tyngdepunktsforskydning

I december-nummeret af Kvant (nr. 4, 2004) diskuteres den relativistiske tyngdepunktsflytning og der udbedes kommentarer til diskussionen, nedenfor kaldet `disk1`. Jeg har et par punkter der måske kan lette lidt på 'de filtrede tråde'.

Den første ligning (1) i `disk1` gælder kun i grænsen for lave hastigheder (som der muligvis sigtes til via Jeppe Dyres kommentar). Den korrekte version - i første omgang for to legemer med hvilemasse m og M - udledes fra bevarelsen af den relativistiske impuls, $\gamma\beta mc$:

$$\gamma_M M \frac{dx_M}{dt} = \gamma_m m \frac{dx_m}{dt} \tag{2}$$

hvorfra man finder ved at integrere over t idet (M) bevæger sig afstanden x og (m) afstanden $L - x$:

$$\gamma_M M \cdot x = \gamma_m m \cdot (L - x) \tag{3}$$

hvor som vanligt $\gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ og $\beta = v/c$. Her giver γ_m kun mening hvis partiklen med massen m har en hvilemasse.

I tilfældet hvor der udsendes en foton er det den 'endnu ukendte masse' (med Borns ord) m vi gerne vil finde. I dette tilfælde fås

$$\gamma_M M \cdot x = m \cdot (L - x) \tag{4}$$

hvor m er massen for hvilken vi endnu ikke kender sammenhængen med energien.

Kombinerer man ligning (4) med

$$(L - x)/c = x/v \tag{5}$$

som var korrekt i `disk1` fås:

$$v/c = m/\gamma_M M \tag{6}$$

der kan indsættes i impulsligningens relativistiske udgave

$$E/c = \gamma_M M \cdot v \tag{7}$$

hvorved man opnår

$$E = mc^2 \tag{8}$$

som *eksakt* er det ønskede, dvs. den til strålingsenergien ækvivalente masse. Der er ikke anden forskel på denne udledning og den tidligere i `disk1`, ligning (1)-(6), end at γ_M er inkluderet korrekt.

Konklusionen er at en flytning af tyngdepunktet *også relativistisk* kræver en ydre kraft, hvis blot man benytter sig af de 'relativistiske masser' hvor Lorentz faktoren er inkluderet som i ligning (2). Det er altså ikke rigtigt at "Det helt grundlæggende i den klassiske mekanik, at tyngdepunktet i et hvilende system ikke kan sætte sig i bevægelse uden ydre påvirkninger, gælder ikke relativistisk." og fejlen optræder af to årsager: Fotonens energi under udsendelsen omsættes direkte til en forøgelse af kassens hvilemasse og der kombineres relativistiske og ikke-relativistiske ligninger. Hvis der i udgangssituationen antages en totalenergi på $(m+M)c^2$ er det klart at kassen kun kan bevæge sig på bekostning af at fotonenergien ikke kan blive $E = mc^2$. Der skal altså regnes på impulsbevarelse (som er rigtigt for $v/c \ll 1$ i `disk1`, ligning (1)-(6)) og ikke på en antagelse om udgangssituationens energi.

Dette 'Gedankenexperiment' blev oprindeligt publiceret af Einstein i Annalen der Physik **20**, 627 (1906).

Ulrik I. Uggerhøj
Institut for Fysik og Astronomi
Aarhus Universitet

Svar til Ulrik I. Uggerhøj

Af *Jens Højgaard Jensen*

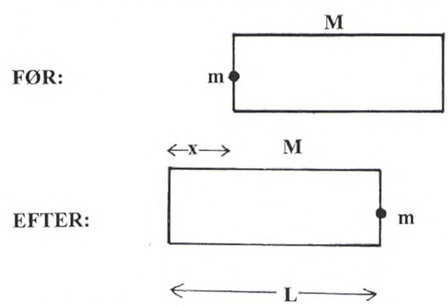
Ulrik I. Uggerhøj (UIU) skal have tak for at have reageret på min opfordring i decembernummeret af KVANT til at kommentere mine – for mig selv parakdoksale - udregninger af tyngdepunktsflytningen i Max Borns tankeekperiment. Jeg vil forsøge at svare, selvom relativitetsteori – som antydet i decembernummeret - ikke er min hjemmebane:

1. Inspireret af UIUs kommentar kan jeg godt se, at der i systemet, hvor den samlede impuls er nul, gælder, "at en flytning af tyngdepunktet også relativistisk kræver en ydre kraft, hvis blot man benyttet sig af 'relativistiske masser". For et system af punktformige partikler er det således definerede tyngdepunkt givet ved:

$$x_{cm} = \frac{\sum (E_i/c^2)x_i}{\sum E_i/c^2}, \tag{9}$$

idet der ved 'relativistiske masser' netop forstås $m_i = E_i/c^2$. Der er altså tale om et tyngdepunkt for systemets energier, E_i. Hvis disse energier er konstante i tiden giver differentation af (9), at dx_{cm}/dt er nul, fordi $p_i = (E_i/c^2)dx_i/dt$ for hver partikel (uanset om den har hvilemasse eller ej) og fordi den samlede impuls $\sum p_i$ er nul. Sætningen om tyngdepunktets bevarelse kan altså med den justerede definition af tyngdepunktet opretholdes for et isoleret system af punktformige partikler, der ikke vekselvirker med hinanden. Den kan også opretholdes, hvis partiklerne vekselvirker punktvis og momentant, idet momentane omlejringer af nogle af energierne E_i på grund af energibevarelsen ikke ændrer x_{cm}, hvis de pågældende energier befinder sig i samme punkt. Men kan sætningen om tyngdepunktets bevarelse opretholdes for lyskvantet og kassen i Max Borns tankeeksperiment? Kassen er jo ikke en punktpartikel.

2. Jeg kendte ikke til Einsteins artikel fra 1906, som UIU gør opmærksom på. Oprindeligt fandt jeg frem til Max Borns fremstilling (i en lærebog) via en henvisning i E.S. Johansens lærebog Mekanisk Fysik I, 2.oplag, 1945, side 361, hvor tankeeksperimentet også gennemgås. Hverken i Max Borns eller i E.S. Johansens lærebog henvises der til Einsteins artikel. Jeg vil herefter omtale tankeeksperimentet som Einsteins.



Figur 3. Einsteins tankeeksperiment.

3. Da UIU og jeg tilsyneladende taler forbi hinanden, vil jeg for præciseringens skyld i korthed repetere Einsteins tankeeksperiment og mine heraf afledte problemer. Essensen i tankeeksperimentet kan, sådan som både Einstein, Max Born og E.S. Johansen fremstiller det, pointeres ved figur 3.

Der er et før og et efter. Før er den stillestående kasse med massen M og længden L forsynet med en ekstra masse m i sin venstre endevæg. Efter er den stillestående kasse rykket stykket x mod venstre og forsynet med den ekstra masse m i sin højre endevæg. Da tyngdepunktet ligger fast, gælder der:

$$Mx = m(L - x) \tag{10}$$

Men hvad nu, hvis det ikke var affyring og absorption af en geværkugle inden i kassen, men udsendelsen og absorptionen af et lyskvant inden i kassen, der havde flyttet kassen? Så må der også være overført noget masse fra den højre endevæg til den venstre endevæg i overensstemmelse med (10), hvis vi går ud fra, at tyngdepunktet ikke kan flytte sig uden påvirkninger udefra. Ligningen viser at *den overflyttede masse m* må være lig med $Mx/(L-x)$.På den anden side kan vi udregne lyskvantets energi til at være $E = Mc^2x/(L-x)$ ved kombination af den klassiske impulsbevarelsesligning $E/c = Mv$ og ligningen $(L-x)/c = x/v$ for tiden det tager lyskvantet at bevæge sig fra den ene endevæg til den anden og tiden det tager kassen at bevæge sig afstanden x. Sammenholdt fås $E = mc^2$, alene ud fra klassisk mekanik og sammenhængen imellem impuls og energi for elektromagnetiske felter.

Men det vi har bevist er kun tilnærmelsesvis Einsteins energi-masse-ækvivalensrelation. Relationen siger, at den overflyttede masse fra den ene endevæg til den anden er ækvivalent med den overflyttede energi fra den ene endevæg til den anden. Og den overflyttede energi er kun tilnærmelsesvis det samme som lyskvantets energi, da energien mc^2 ved emissionen omsættes til E *og* kassens kinetiske energi, ligesom energiforøgelsen af kassens højreside ved absorptionen både kommer fra lyskvantets energi og kassens kinetiske energi. Einstein, Max Born og E.S. Johansen gør da også alle opmærksom på, at deres regninger er approksimative.

4. I UIUs udregning af $E = mc^2$ *eksakt* står m ikke for den på figur 3 overførte masse, men for "den til strålingsenergien ækvivalente masse". Som jeg forstår udregningen, siger den alene, at hvis vi med m for et lyskvant mener proportionalitetskonstanten mellem impuls og hastighed, $p = mc$, så følger det af $p = E/c$, at E er lig mc^2. Og det har ikke så meget med Einsteins tankeeksperiment at gøre.

5. Jeg regner stadig mine eksakte relativistiske regninger i december nummeret på Einsteins kasse for rigtige. Da energien før og efter lyskvantet er $Mc^2 + mc^2$ og under lysets transport fra den ene væg til den anden væg er $E + \gamma_M Mc^2$, må energibevarelsen indebære $E = mc^2 - Mc^2(\gamma_M - 1)$. Og sammenholdes det med impulsbevarelsesligningen $E/c = \gamma_M Mv$ kan $\frac{v}{c}$ findes til at være:

$$v/c = \frac{2m/M + (m/M)^2}{2 + 2m/M + (m/M)^2} \tag{11}$$

Dette kan herefter, som gjort i december-nummeret, indsættes i $(L - x)/c = x/v$ til bestemmelse af x udtrykt ved m, M og L. Eller det kan indsættes i UIUs ligning (4) med m forstået som E/c^2 (og $E = mc^2 - Mc^2(\gamma_M - 1)$). Da UIUs ligning (4) er en kombination af hans ligninger (5) og (6), er det ikke overraskende, at der i begge tilfælde fås samme resultat, nemlig:

$$x = \frac{m}{m+M}L - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 L \tag{12}$$

Sammenholdt med x bestemt af ligning (10) viser ligning (12), at tyngdepunktet i Einsteins tankeeksperiment, når der regnes eksakt relativistisk, tværtimod at ligge fast altså flytter sig afstanden:

$$\Delta x_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 L \tag{13}$$

Udgangspunktet for Einsteins klassiske og approksimative regning på kassen med resultatet $E = mc^2$ var, at kassens tyngdepunkt lå fast svarende til ligning (10), i betragtning af at der ikke er nogen ydre påvirkninger af kassen. Men regnes der i overenstemmelse med Einsteins relativitetsteori finder der altså ironisk nok en tyngdepunktsflytning sted uden ydre påvirkning.

6. Efter at have tænkt yderligere over sagen og læst i A. P. French: Special Relativity, s. 27 (UIUs henvisning) tror jeg imidlertid alligevel ikke, at udregningen modbeviser, at tyngdepunktet i et hvilende system ikke kan sætte sig i bevægelse uden ydre påvirkninger. Einsteins kasse er nemlig principielt set ikke et system, der kan regnes eksakt på. Da begrebet 'stift legeme eksakt set ikke er af denne verden.

Allerede klassisk set må man gå ud fra, at energien, der i Einsteins tankeeksperiment frigives fra den ene endevæg fordeler sig på svingningsenergi for kassen som helhed og energiabsorption i den anden endevæg, og ikke alene omsættes til det sidste, som antaget. Som illustration overlades følgende opgave til læseren:

Et system består af to ens masser af størrelsen $\frac{M}{2}$, der er indbyrdes forbundne med en fjeder. Fra den ene masse affyres en pistolkugle med masse m, som dernæst absorberes i den anden masse. Tiden for passagen af pistolkuglen fra den ene masse til den anden er forsvindende i forhold til systemets svingningstid. Hvordan er fordelingen af krudtenergien på henholdsvis svingningsenergi og varme i den absorberende endevæg som funktion af $\frac{m}{M}$? (uafhængigt af fjederkonstantens størrelse)

Og relativistisk kan man ikke gå ud fra, at bevægelsen af lysafsendelsesvæggen momentant kan forplante sig til bevægelse af den modsatte endevæg. Den anden endevæg kan faktisk tidligst registrere, at lyskvantet blev afsendt, når det når frem til den.

7. For et isoleret system af punktformige partikler, der alene vekselvirker punktvist og momentant, kan den klassiske sætning om tyngdepunktets bevarelse for et isoleret system med samlet impuls 0, som vist, ved hjælp af (9) generaliseres til også at gælde relativistisk. I overensstemmelse hermed er der i French, s. 27 vist en udregning, der erstatter Einsteins kasse med blot dens endevægge, uden indbyrdes kobling. Hvor udregningen både læst klassisk og læst relativistisk giver eksakt overensstemmelse imellem $E = mc^2$ og fastholdelse af tyngdepunktet. Behandlingen i French viser også, at det problematiske ved at operere med begrebet 'stift legeme' er en kendt sag.

Om der helt generelt gælder, at energityngdepunktet ligger fast for upåvirkede systemer med samlet impuls 0, ved jeg ikke.