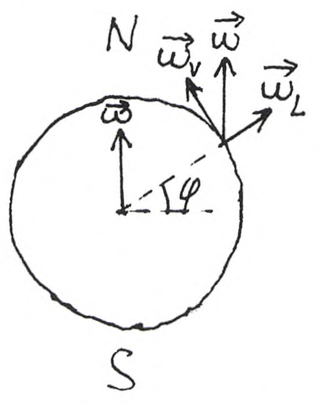
Breddeopgaver nr. 9, 10 og 11

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

I KVANT nr. 3 (september 2002) bragte vi breddeopgave nr. 9 om vandstandsforskellen mellem østsiden og vestsiden af Storebælt ved en strømhastighed gennem bæltet på ca. 5 km i timen og breddeopgave nr. 10 om størrelsesordenen af den relative trykforskel på skinnerne fra et hurtigtkørende tog ved forskellige kørselsretninger. Her er så løsninger og kommentarer til de to opgaver.

Løsning til opgave 9

Vandoverfladen af Storebælt stiller sig vinkelret på det sammensatte kraftfelt af tyngdekraft (rettet efter lodlinien) og corioliskraft (rettet imod Korsør ved nordgående strøm og imod Nyborg ved sydgående strøm). Det betyder, at vandstandsforskellen mellem østsiden og vestsiden af bæltet forholder sig til afstanden imellem Korsør og Nyborg som corioliskraften forholder sig til tyngdekraften.



Det almene udtryk for corioliskraften er $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}$, hvor $\vec{V}$ er hastigheden af en masse m i forhold til et referencesystem, der roterer i forhold til inertialsystemerne med den momentane rotationshastighed $\vec{\omega}$. I tilfældet bevægelse på overfladen af den roterende jordklode ses det ved opløsning af $\vec{\omega}$ i dens lodrette komposant $\vec{\omega}_L$ og dens vandrette komposant $\vec{\omega}_V$ som vist på figuren, at corioliskraften har en vandret komposant $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_L$, som er vinkelret på $\vec{V}$ (mod højre på den nordlige halvklode) og af størrelsen $2mV\omega_L$, og en lodret komposant $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_V$, hvis størrelse og retning (opad eller nedad) afhænger af retningen af $\vec{V}$.

Idet $\omega_L = \omega \cdot \sin\phi$, hvor ϕ angiver breddegraden af Storebælt, fås, at vandstandsforskellen mellem Korsør og Nyborg er:

$$\approx 20\,km \cdot \frac{2V\omega\sin\phi}{g} \approx 20km \cdot \frac{2 \cdot 5\frac{km}{time} \cdot \frac{2\pi}{24\;time} \cdot \frac{1}{2}}{10\frac{m}{sek^2}} \approx 20\,cm \tag{1}$$

Løsning til opgave 10

Hvis toget kører imod nord eller syd er $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_V$, som er corioliskraftens lodrette komposant, nul. Hvis toget kører imod øst er $\vec{V} \times \vec{\omega}_V$ rettet bort fra Jordens centrum, medens retningen er imod Jordens centrum, hvis der køres imod vest. Det lodrette tryk på skinnerne er derfor størst, når der køres imod vest og mindst, når der køres imod øst. Det gælder både på den nordlige og den sydlige halvklode.

Størrelsesordenen af den relative trykforskel imellem kørsel imod vest og øst for et TGV-tog i Frankrig er:

$$2 \cdot \frac{2V\omega\cos\phi}{g} \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 300\frac{km}{time} \cdot \frac{2\pi}{24\;time} \cdot \frac{1}{2}}{10\frac{m}{sek^2}} \approx 10^{-3} \tag{2}$$

Kommentarer

1. Niels Kristian Højerslev har i KVANT nr. 2 (maj 2002) gjort et "pædagogisk" forsøg på at beskrive og udlede corioliskraften som alternativ til gængse lærebogsfremstillinger. Jeg synes ikke forsøget er lykkedes. Tværtimod virker udledningen mystificerende på mig ved at tage udgangspunkt i den kinematiske ligning

$$\vec{a}_a = \vec{a}_m + \vec{a}_r \tag{3}$$

for sammenhængen imellem absolut acceleration, medføringsacceleration og relativ acceleration, som jo gælder for beskrivelsen af en bevægelse i forhold til to forskellige koordinatsystemer, hvis nulpunkter er accelererede i forhold til hinanden, og hvis koordinatakser ligger fast i forhold til hinanden. Hvorimod corioliskraften hører til bevægelsesbeskrivelse i et koordinatsystem, hvis akser roterer i forhold til inertialsystemerne.

Mit bud på en pædagogisk indføring i corioliskraften består af tre skridt:

1. Erfaringsmæssigt findes der koordinatsystemer, inertialsystemerne, hvor bevægelse sker i overensstemmelse med Newtons 2. lov:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_a \tag{4}$$

Her er $\vec{F}$ summen af såkaldte *naturkræfter* i spil. Naturkræfter er sådanne, hvor kræfterne kan forklares ved henvisning til en genstand, der forårsager dem. F.eks. tryk- og trækkræfter (der er noget, der trykker eller trækker), gnidningskræfter (der er noget, der gnides imod), massetiltrækningskræfter (der er en masse, der trækker) eller elektriske til- og frastødningskræfter (der er f.eks. en ladning, der trækker eller frastøder).

2. *Matematisk* kan der findes en kinematisk ligning for sammenhængen imellem accelerationerne i samme bevægelse set i forhold til to forskellige koordinatsystemer, som har fælles nulpunkt og akser, der roterer i forhold til hinanden:

$$\vec{a}_a = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{a}_r \qquad (5)$$

Her er $\vec{\omega}$ den momentane rotation af r-systemet set fra a-systemet, $\vec{r}$ stedvektoren for bevægelsen (som afhænger af nulpunkt, men ikke akseretninger, for koordinatsystemet, som bevægelsen beskrives i forhold til) og $\vec{a}_r$ og $\vec{V}_r$ bevægelsens acceleration og hastighed relativt til r-systemet.

Ligningen udledes mest kompakt ved at gøre sig klart, at der for enhver vektor, $\vec{A}$, gælder:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_r + \vec{\omega} \times \vec{A}, \qquad (6)$$

hvor $d\vec{A}/dt|_a$ betyder flytningen af $\vec{A}$ per tidsenhed i forhold til a-systemet og $d\vec{A}/dt|_r$ tilsvarende flytningen af $\vec{A}$ per tidsenhed i forhold til r-systemet. Først fås:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (7)$$

ved at anvende operatorligheden (6) med $\vec{r}$ på $\vec{A}$'s plads. Dernæst fås den efterspurgte ligning (5) ved at anvende operatorligheden (6) én gang til, nu med $\vec{V}_a$ på $\vec{A}$'s plads og indsætning af udtrykket for $\vec{V}_a$ fra ligning (7). Udledningen, som findes i større detalje i f.eks. Ture Eriksson, Torbjörn Lagerwall, Olof Beckman: "Fysik 1" , Almqvist & Wiksell Förlag AB, Stockholm 1970, side 125 til side 130, er udtømmende og eksakt.

3. *Kombineres* den matematiske ligning (5) med den fysiske erfaringsligning (4), Newtons 2. lov for inertialsystemer, fås

$$\vec{F} + m\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2m\vec{V}_r \times \vec{\omega} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} = m \cdot \vec{a}_r \qquad (8)$$

som bevægelsesligningen for bevægelser set i forhold til et i forhold til inertialsystemerne roterende system. I skemaet "kraft = masse × acceleration" må der øjensynligt på kraftsiden udover naturkræfterne også opereres med tre såkaldte *systemkræfte*r, som ikke kan forklares ved henvisning til en genstand, der forårsager dem. Deres størrelser og retninger hænger, som vist matematisk, sammen med koordinatsystemets grad af afvigelse fra at være et inertialsystem. Corioliskraften er den ene af de tre systemkræfter. Hvis nulpunktet for koordinatsystemet, som en bevægelse beskrives i forhold til, er accelereret i forhold til inertialsystemerne, skal der yderligere opereres med en fjerde systemkraft i modsat retning af nulpunktsaccelerationen og af størrelse som denne gange massen, i overensstemmelse med kombinationen af ligning (3) og ligning (4).

Det er min erfaring, at det almene udtryk for corioliskraften kun lader sig introducere formelt matematisk. Det er muligt at forstå den mere fysisk i specialtilfælde som radial bevægelse i forhold til $\vec{\omega}$ og cirkulær bevægelse omkring $\vec{\omega}$. Men alment er det næsten umuligt intuitivt at overskue indholdet i udregninger, der involverer krydsprodukter og differentiationer i flere omgange, hvorfor der ikke er nogen vej uden om en formel indføring. Både ved introduktion af specialtilfælde og ved den almene udledning er det erfaringsmæssigt helt afgørende for begrebsforståelsen at dvæle ved, at bevægelse er bevægelse i forhold til noget. Og at dette noget nødvendigvis skal præciseres.

2. De studerendes svar til eksamen på opgave 9 svarede i det væsentlige til min ovenstående løsning. De erindrede sig formlen for corioliskraften og satte den i forhold til tyngdekraften. Hvad ellers kunne tænkes at være i spil i denne opgave end corioliskraften?

Med opgave 10 forholdt det sig helt anderledes. Her blev ordet corioliskraft typisk ikke nævnt. I stedet ræsonneredes der over øst- eller vestkørende tog på ækvator, altså specialtilfældet cirkulær bevægelse om $\vec{\omega}$, svarende til ligningen:

$$m\frac{(R\omega \pm V)^2}{R} = mg - N, \qquad (9)$$

hvor N er trykkraften mellem tog og skinner, R Jordens radius, g gravitationskraftfeltstyrken, og hvor + gælder for kørsel mod øst, medens – gælder for kørsel mod vest. Og det er jo rigtigt af de studerende ikke at referere til en corioliskraft som ligning (9) er skrevet op, idet de jo – typisk uden eksplicit at gøre opmærksom på det – regner i inertialsystemet.

Ved udgangning af parentesen og omflytning af leddene fås bevægelsesligningen, som den ser ud i det roterende jordsystem:

$$m\frac{V^2}{R} = mg - mR\omega^2 \mp 2m\omega V - N \qquad (10)$$

I specialtilfældet her – som også Niels Kristian Højerslev behandler i sin artikel – ses corioliskraften (og centrifugalkraften) at dukke op på en måde, der er til at overskue. En bevægelsesligning i Newtons mekanik består af masse gange acceleration i forhold til det valgte referencesystem på den ene side og summen af de virkende kræfter på den anden. Og hvis vi vil regne accelerationen i forhold til det roterende jordsystem, som i ligning (10), dukker der tydeligvis ekstra kraftled op i ligningen sammenlignet med ligning (9), hvor vi regner accelerationen ud i forhold til inertialsystemet, hvis ikke de to ligninger skal være i modstrid med hinanden.