# Stenudslyngning
# – breddeopgave 117 med didaktisk kommentar

*Jens Højgaard Jensen*[1]*, IMFUFA, INM, RUC*

*Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.*

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 117 her i Kvant):

**Breddeopgave 117. Stenudslyngning**

*En pige slynger et glat og stift plastikrør rundt i et vandret plan. På indersiden af røret sidder en lille sten fast i noget snavs. Stenen river sig løs. Hvor stor er stenens energi, når den forlader røret? Begrund svaret.*

**Løsning**

Stenens hastighed, når den forlader røret, er vektorsummen af hastigheden af rørspidsen $v_{\mathrm{r}}$ og den hastighed, stenen da har i forhold til røret, $v_{\mathrm{sr}}$. Da $v_{\mathrm{r}}$ og $v_{\mathrm{sr}}$ er vinkelrette på hinanden, er stenens energi $E$ når den forlader røret:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{r}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{sr}}^2, \tag{1}$$

hvor stenens masse er kaldt $m$.

Hvis plastikrøret slynges rundt med vinkelhastigheden $\omega$, og røret har længden $l_{\mathrm{r}}$, er $v_{\mathrm{r}}$ lig med $l_{\mathrm{r}}\omega$. Det første bidrag til energien i ligning (1) er derfor:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{r}}^2 = \frac{1}{2}m(l_{\mathrm{r}}\omega)^2. \tag{2}$$

Det andet bidrag kan findes ved at integrere arbejdet, centrifugalkraften udfører i rørets roterende system. I det roterende system er stenen, udover af centrifugalkraften, påvirket af en tyngdekraft, en Corioliskraft og en normalreaktion fra kontakten med røret. Men tyngdekraften og Corioliskraften ophæves af normalreaktionens henholdsvis lodrette og vandrette komposant, da stenen, bedømt fra rørets system, kun bevæger sig i retningen langs røret. Hvis stenen river sig løs i afstanden $l_{\mathrm{s}}$ fra centrum af det roterende system, har vi derfor:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{sr}}^2 = \int_{l_{\mathrm{s}}}^{l_{\mathrm{r}}} mr\omega^2 dr = \frac{1}{2}m\omega^2(l_{\mathrm{r}}^2 - l_{\mathrm{s}}^2). \tag{3}$$

Ved indsættelse af ligningerne (2) og (3) i (1) fås da

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(2l_{\mathrm{r}}^2 - l_{\mathrm{s}}^2) \tag{4}$$

som svar på opgaven.

**Kommentar**

Opgaven, som skyldes Poul Winther Andersen, er som vist ikke nødvendigvis matematikkrævende. Alligevel er den nok ikke så nem. Udfordringen ligger ikke i det matematiske, men i det fysisk begrebsmæssige. Regning i det roterende system som input til et resultat i inertialsystemet er usædvanligt.

Hvordan kan man mon nå det samme resultat ved at holde sig til inertialsystemet hele vejen? I inertialsystemet påvirkes stenen kun af tyngdekraft og normalreaktion, hvor normalreaktionens lodrette komposant og tyngdekraften ophæver hinanden. Tilbage til at levere arbejdet i inertialsystemet, der forøger stenens energi til $E$ i ligning (4), er alene normalreaktionens vandrette komposant. Hvordan lader det sig gøre? For at svare på det må der matematisk formalisering til.

Lad $\boldsymbol{e}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t)$ være en enhedsvektor i inertialsystemet i rørets retning, og $\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) = (-\sin\omega t, \cos\omega t)$ en enhedsvektor vinkelret herpå. Så kan vi udtrykke stenens position i inertialsystemet som $\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}(t)$ og normalreaktionens vandrette komposant som $\boldsymbol{N}(r(t)) = N(r(t))\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t)$ til indsætning i Newtons II lov i inertialsystemet:

$$N(r(t))\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) = m\frac{d^2r(t)\boldsymbol{e}(t)}{dt^2}. \tag{5}$$

Idet $d\boldsymbol{e}(t)/dt = \omega\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t)$ og $d\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t)/dt = -\omega\boldsymbol{e}(t)$, fører de to gange differentiation i ligning (5) til:

$$N(r(t))\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) = \tag{6}$$
$$2m\omega\frac{dr(t)}{dt}\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) + m(\frac{d^2r(t)}{dt^2} - \omega^2r(t))\boldsymbol{e}(t)\ .$$

Heraf ses af nødvendighed, at $d^2r(t)/dt^2 - \omega^2r(t) = 0$, (som er bevægelsesligningen for $r(t)$ i rørets system). Det ses også, at $N(r(t))$ nødvendigvis er lig med $2m\omega dr(t)/dt$, (svarende til Corioliskraften i rørets sy-

[1] Jens Højgaard Jensen døde den 3. april 2025 og efter familiens ønske bringer vi i dette og de kommende numre de opgaver, som han havde forberedt. Se også mindeord fra Kristine Niss og Jeppe Dyre på bagsiden af Kvant nr. 2 (2025).

stem). Udtrykket kan benyttes til at udregne arbejdet $A$, som den vandrette komposant af normalkraften udfører i inertialsystemet:

$$A = \int \boldsymbol{N}(r(t)) \cdot \boldsymbol{dr}(t) \tag{7}$$

Da

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N}(r(t)) \cdot \boldsymbol{dr}(t) \\ &= N(r(t))\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) \cdot [dr(t)\boldsymbol{e}(t) + r(t)d\boldsymbol{e}(t)] \\ &= N(r(t))\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t) \cdot r(t)\omega\boldsymbol{e}_{\mathrm{v}}(t)dt \\ &= 2m\omega[dr(t)/dt]r(t)\omega dt = 2m\omega^2 r dr, \end{aligned} \tag{8}$$

når vi frem til:

$$A = \int_{l_{\mathrm{s}}}^{l_{\mathrm{r}}} 2m\omega^2 r dr = m\omega^2(l_{\mathrm{r}}^2 - l_{\mathrm{s}}^2). \tag{9}$$

I inertialsystemet har stenen energien $\frac{1}{2}m(\omega l_{\mathrm{s}})^2$, før den river sig løs. Lægges arbejdet udført af normalkraftens vandrette komposant hertil, fastlægger det stenens energi, når den forlader røret, til at være:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 l_{\mathrm{s}}^2 + A = \frac{1}{2}m\omega^2(2l_{\mathrm{r}}^2 - l_{\mathrm{s}}^2), \tag{10}$$

i overensstemmelse med udregningen via det roterende system, jævnfør ligning (4).

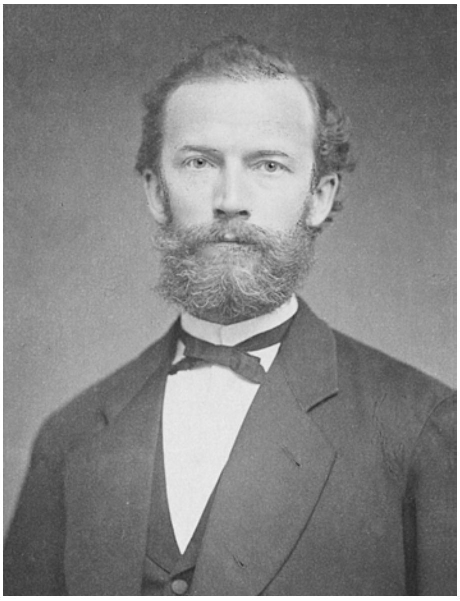
Efter sigende [1] blev en yngre kollega til fysikeren Enrico Fermi udsat for denne hårde kommentar til en udregning, han havde præsenteret Fermi for:

“There are two ways of doing calculations in theoretical physics. One way, and this is the way I prefer, is to have a clear physical picture of the process you are calculating. The other way is to have a precise and self-consistent mathematical formalism. You have neither.”

Beregningen af energien af stenens slutenergi via det roterende system, baserer sig for mig på et fysisk billede af processen vi regner på. Ligning (3) kan således helt enkelt tolkes som energibevarelse i det roterende system. Til venstre står tilvæksten af kinetisk energi. Til højre står tabet af potentiel energi hørende til det konservative centrifugalkraftfelt. På breddekurset undervises de studerende i, som Fermi foretrækker det, at have et klart fysisk billede af, hvad der regnes på ved opgaveløsning.

Anderledes forholder det sig med beregningen i inertialsystemet. Selvom normalkraften er vinkelret på røret, er den ikke vinkelret på bevægelsen i inertialsystemet, og derfor udfører den arbejde i dette system. Men jeg har her nemmere ved at vende mig til en konsistent matematisk formalisme, end at danne mig brugbare fysiske billeder.

Jeg tænker, at de to slags løsninger af opgaven illustrerer de to slags strategier, Fermi beskriver. Martin Niss har i artiklen ”What Is Physics Problem-Solving Competency? The Views of Arnold Sommerfeld and Enrico Fermi” [2] karakteriseret de to strategier og knyttet dem til henholdsvis Fermi og Sommerfeld. På RUC lægger breddekurset sig op af Fermis foretrukne position, medens de øvrige kurser i højere grad dyrker opgaveløsning à la Sommerfeld.

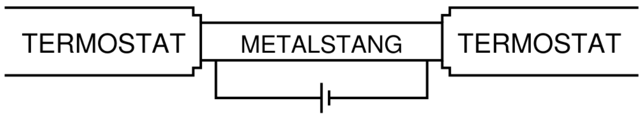


**Figur 1.** Den tyske fysiker Friedrich Kohlrausch (1840–1910) er især er kendt for målinger af elasticitet, lysbrydning, jordmagnetisme, vægtfylde, elektrisk ledningsmodstand og elektrolytters ledningsevne. Hans *Leitfaden der praktischen Physik* (Leipzig 1870), der udkom i mange oplag, har haft stor betydning for indførelsen af praktiske øvelser i fysikundervisningen.

## Breddeopgave 118. Kohlrausch’ metode

Inden næste nummer af Kvant udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2008, nr. 118 i rækken her i Kvant):

*Ved den såkaldte Kohlrausch’ metode måles forholdet mellem varmeledningsevnen og den elektriske ledningsevne for metaller ved hjælp af en opstilling som antydet på figuren:*




**Figur 2.** Illustration af breddeopgave 118.

*En varmeisoleret metalstang anbringes mellem to termostater, der holder dens ender ved samme konstante temperatur. Stangen opvarmes ved, at der sendes en elektrisk strøm igennem den. Forholdet mellem varmeledningsevnen og den elektriske ledningsevne for metallet er da givet ved spændingen over metalstangen og temperaturforskellen mellem stangens midte og dens ender. Hvordan? Begrund svaret.*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

### Litteratur

[1] D. N. Schwartz (2017) “The Last Man Who Knew Everything”. Basic Books (New York) side 295.

[2] M. Niss (2018) “What Is Physics Problem-Solving Competency? The Views of Arnold Sommerfeld and Enrico Fermi”, *Science and Education*, bind **27**, side 357–369.