Minigolf – breddeopgave 114 med kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 114 her i Kvant):

Breddeopgave 114. Minigolf

Hvor stor en fart skal en minigolfkugle, der ruller hen imod et lodret loop, mindst have, for at rulle rundt i loopet uden at falde ned? Begrund svaret.

Løsning

En minigolfkugle med radius r og massen m har inertimomentet $I = \frac{2}{5}mr^2$ om centrum. Hvis den ruller rent henad den vandrette bane med farten v, er vinkelhastigheden ω i dens rotation omkring centrum bestemt ved rulningsbetingelsen $v = r\omega$. Den kinetiske energi er

$$E_{\text{kin,bane}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2. \qquad (1)$$

I toppunktet af et cirkulært loop er den kinetiske energi, forudsat minigolfkuglen stadig ruller rent, tilsvarende givet som $\frac{7}{10}mu^2$, hvor u er kuglens hastighed i toppunktet. I grænsesituationen, hvor der netop ikke er nogen normalreaktionskraft i toppunktet, er u ifølge Newtons anden lov, anvendt på cirkelbevægelsen af kuglens massemidtpunkt, givet ved:

$$mu^2/(R - r) = mg, \qquad (2)$$

hvor R er radius i det cirkulære loop og g tyngdefeltstyrken. I grænsesituationen er kuglens kinetiske energi i toppunktet derfor $E_{\mathrm{kin,top}} = \frac{7}{10}mu^2 = \frac{7}{10}mg(R-r)$. Samtidig er kuglens massemidtpunkt i toppunktet flyttet afstanden $2(R-r)$ opad i tyngdefeltet, og dens potentielle energi er derfor øget med $E_{\mathrm{pot}} = 2(R-r)mg$.

Det følger da af energibevarelsen, at den mindste værdi af $E_{\mathrm{kin,bane}}$, der skal til for at minigolfkuglen ikke falder ned på vej rundt i loopet, er givet ved:

$$E_{\mathrm{kin,bane}} = E_{\mathrm{kin,top}} + E_{\mathrm{pot}}. \qquad (3)$$

Altså, $\frac{7}{10}mv_{\mathrm{min}}^2 = \frac{7}{10}mg(R-r) + 2mg(R-r) = \frac{27}{10}mg(R-r)$, hvoraf ses, at minigolfkuglen til en start mindst skal have farten

$$v_{\mathrm{min}} = \sqrt{\frac{27}{7}g(R-r)}. \qquad (4)$$

for at rulle rundt i loopet uden at falde ned.

Kommentar

Opgaven og løsningen af den er ikke forbeholdt breddekurset på RUC. Opgaven med tilhørende løsning er meget udbredt ved indledende mekanikundervisning på alverdens universiteter. Der findes f.eks. demonstrationsudstyr i handelen til eftervisning af resultatet, hvor en kugle fra varierende højder fra hvile kan rulle ned ad en skråtstillet, retlinjet skinne, der er tangent til en cirkulær loop, på hvis inderside kuglen kan rulle videre rundt. Udfordringen er da eksperimentelt at finde den minimale højde, hvorfra kuglen ruller ned ad skinnen og stadig ruller rundt i loopet uden at falde ned.

Karl C. Mamola og William A. (Toby) Dittrich (M og D) har imidlertid ved hjælp af højhastighedsvideooptagelser fundet stor forskel mellem på den ene side det teoretiske resultat svarende til min ovenstående løsning, hvor den mekaniske energi er bevaret, og på den anden side eksperimentelle resultater ved brug af et undersøgt demonstrationsudstyr [1]. For at komme rundt i loopet, uden at falde ned, skal kuglen i demonstrationsforsøget starte sin bevægelse betragteligt højere oppe ad en skråtstillet skinne, end beregnet ud fra mekanisk energibevarelse. M og D fandt, at kuglen mistede ca. 10% af sin mekaniske energi på vej ned af skinnen og ca. 20% af sin mekaniske energi ved overgangen mellem retlinjet bevægelse og cirkulær bevægelse.

Det kan ikke være så svært at slippe af med de 10%. Kuglen både skrider og ruller åbenbart ned ad skinnen, så der udvikles gnidningsvarme. Demonstrationsudstyret må, for at sikre ren rulning ned ad skinnen, udstyres med en længere skinne med mindre hældning i forhold til vandret og/eller forsynes med større statisk gnidningskoefficient mellem skinne og kugle ved ændret materialevalg.

Men hvad med de 20%? De skyldes et stød mellem bane og kugle når krumningsradius for bevægelsen af massemidtpunktet af kuglen ændrer sig diskontinuert. I breddeopgaven ændrer krumningsradius sig fra ∞ til $R-r$, når minigolfkuglen bevæger sig ind i bunden af loopet. Normalreaktionen mellem kuglen og banen ændrer sig da på meget kort tid fra mg til $mg + mv^2/(R-r)$. Interaktionen mellem kugle og bane afsætter så svingningsenergi i kugle og/eller bane ved stødet. Ved brug af resultatet fra ligning (4) ses det, at normalreaktionen ved stødet mindst øges med faktoren

$$(mg + mv_{\mathrm{min}}^2/(R-r))/mg = 1 + 27/7 \approx 5, \qquad (5)$$

når minigolfkuglen er på grænsen til ikke at kunne rulle rundt i loopet uden at falde ned.

Da vi stillede minigolfopgaven til eksamen havde jeg aldrig tænkt på eller hørt om et stødfænomen som det, der er på tale her, selvom fænomenet har været kendt længe. M og D har således en henvisning til en bog fra 1883, hvor fænomenet er knyttet til risikoen for afsporing af jernbanetog. For at mindske risikoen skal overgangen fra én krumningsradius til en anden for jernbaneskinnerne ske glidende, fx ved et skiftespor. Også ved konstruktionen af rutsjebaner er det almindeligt at ændre krumningsradius gradvist ved starten på et loop.

Jeg er ikke ked af, at min løsning af minigolfopgaven ikke er så lige til at eftervise i praksis. Et er at lære fysik, noget andet er at lære at tænke som en fysiker. På samme måde som, at et er ordforråd, noget andet er sprogbeherskelse. Det andet forudsætter det første, men er en mere omfattende sag. En kok skal udover at kunne følge opskrifter også kunne udvikle nye. På samme måde med en fysiker. Og den eksperimentelle afvigelse fra min standardløsning af minigolfopgaven åbner for træning i at lære at tænke som fysiker. F.eks. ved eksperimentelt projektarbejde. Hvordan afhænger tabet af mekanisk energi af indgående former og materialer? Og hvorfor?

Breddeopgave 115. Gnidningsvarme fra rotation

Inden næste nummer af Kvant udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2022, nr. 115 i rækken her i Kvant):

To cylindre, den ene hul, den anden inden i den første, er ophængt, så de kan rotere gnidningsfrit om deres fælles midterakse. Den første cylinders indre radius er svagt større end den anden cylinders ydre radius. Den ydre cylinder sættes i rotation, medens den indre er i hvile. Ved et uheld opstår der imidlertid på et tidspunkt gnidningskontakt imellem cylindrene. De ender derfor med at rotere sammen. Hvor stor en del af startenergien bliver til varme? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] K.C. Mamola og W.A. Dittrich (2021) "Energy loss and jerk on the loop-the- loop", *Am. J. Phys.*, bind **89**, side 583–588.