Benzinforbrug og covidsmitte
– breddeopgave 91 og 92 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var:

Breddeopgave 91 og 92. Benzinforbrug og covidsmitte

Hvordan afhænger benzinforbruget og CO_2-udledningen ved bilkørsel per kørt kilometer af hastigheden, der køres med? Begrund svaret.

I lukkede rum er der fare for at blive smittet med coronavirus, selvom der holdes afstand, hvis ikke der luftes ud. Det skyldes, at mikrodråber (aerosoler) af virussen hænger i længere tid i luften, og derfor kan bevæges længere rundt, end de større dråber, som undgås ved at holde afstand. Hvordan afhænger den tid, som mikrodråberne hænger i luften, af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsning

91. Energien fra forbrænding af benzin i en bils benzinmotor går til spildvarme og arbejde, som motoren udfører på bilens hjul. Benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer afhænger af det leverede arbejde af bilens motor per kørt kilometer. Når bilen har kørt et stykke vej, er dette arbejde det samme som gnidningskraften fra vejen på bilens dæk gange længden af stykket. Antager vi, at benzinmotorens nyttevirkning er uafhængig af bilens hastighed, er benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer derfor proportional med størrelsen af gnidningskraften mellem vej og dæk.

Ved almindelig bilkørsel med konstant hastighed på vandret vej er gnidningskraften fra vejen på bilens dæk og luftmodstanden imod bilens bevægelse modsatrettede og lige store. På grund af størrelsen af biler og størrelsen af typiske kørehastigheder vil vi antage, at energioverførslen til luften omkring en bil via luftmodstanden umiddelbart sker i form af et hvirvlende kølvand i luften, altså at arbejdet leveret af bilens motor omsættes til makroskopisk kinetisk energi i luften. I så tilfælde spiller luftens viskositet kun en rolle for, hvor hurtigt hvirvlerne, efter de er dannet, siden nedbrydes til varme, og ikke for størrelsen af energien i luften og derved luftmodstanden. Udover af bilens størrelse r og dens hastighed v afhænger luftmodstanden da kun af luftens massefylde ρ. Af dimensionsgrunde er luftmodstanden, og dermed gnidningskraften mellem vej og dæk, så givet ved en talfaktor gange $\rho r^2 v^2$. Gnidningskraften mellem vej og dæk, og dermed benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer, er derfor proportionale med kørehastigheden kvadreret.

92. Ser vi på et lodret fald af en dråbe, vil dens hastighed stige, indtil luftmodstanden imod dråbens bevægelse er vokset til at være lige så stor som den modsatrettede tyngdekraft på dråben. For en mikrodråbe sker det hurtigt, hvorefter dråben vil bevæge sig med en konstant hastighed bestemt af, at luftmodstand og tyngdekraft ophæver hinanden. Da dråben er meget lille, antager vi, at luftmodstanden imod dens fald hænger sammen med, at dens gradvise tab af potentiel energi går til varmeudvikling i laminar strømning omkring den. Luftmodstanden skyldes gnidning i luften. Det makroskopiske strømningsmønster omkring dråben er konstant det samme. Vi antager derfor, at luftmodstanden udover af dråbens størrelse r og dens faldhastighed v er bestemt af luftens viskositet η og ikke afhænger af luftens massefylde. Af dimensionsgrunde er luftmodstanden da givet ved en talfaktor gange $\eta r v$. Med talfaktoren 6π (i overensstemmelse med Stokes? lov for en kugleformet dråbe), m for en dråbes masse, og g for tyngdefeltstyrken, er balanceligningen mellem luftmodstanden og tyngdekraften på en dråbe da:

$$6\pi\eta r v = mg. \tag{1}$$

Mikrodråberne består i det væsentlige af vand med massefylden ρ_v, således at $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v$. Altså har vi

$$v = \frac{2}{9} r^2 \rho_v \frac{g}{\eta} \tag{2}$$

for en dråbes faldhastighed. Tiden τ, som dråben er om at falde højden h, er derfor:

$$\tau = \frac{9\eta h}{2r^2 \rho_v g} \tag{3}$$

Svaret på opgaven er altså, at tiden, som det tager mikrodråber at falde til jorden, er omvendt proportional med dråbernes størrelse kvadreret.

Kommentar

På RUC er halvdelen af studietiden optaget af projektarbejde. Mængden af obligatorisk kursuspensum er begrænset. Fx er der ikke på fysikuddannelsen afsat tid til et kursus specielt i hydrodynamik/aerodynamik. Emnet behandles, hvis ikke det tages op i et projektarbejde eller et tilvalgskursus, alene som en mindre del af de to kurser i fysisk problemløsning (breddekurset). I alt med sammenlagt 8 skematimer. Vi giver ikke nogen matematikbåren introduktion svarende til traditionen. I stedet introducerer vi mere kvalitativt til emnet med fokus på ved dimensionsanalyse at løse problemer, som de to ovenstående [1].

Om luften strømmer jævnt og laminart eller hvirvlende og turbulent omkring en genstand i en luftstrøm må i almindelighed afhænge af luftens massefylde ρ, luftens viskositet η, genstandens størrelse r, genstandens form, og den relative hastighed v imellem genstanden og luftstrømmen. Luftmodstanden må således umiddelbart være en funktion af de 4 størrelser ρ, η, r og v, udover dimensionsløse størrelser til karakterisering af genstandens form. Imidlertid viser dimensionsanalyse, at strømningsmåden kan karakteriseres alene ved genstandens form og værdien af det dimensionsløse *Reynoldstal*:

$$Re = \rho r v / \eta. \tag{4}$$

For en given form behøver man derfor ikke måle luftmodstanden som funktion af ρ, η, r og v efter tur og i en uoverskuelig mængde indbyrdes kombinationer. I stedet kan man nøjes med at måle luftmodstanden for forskelligt formede genstande som funktion alene af Reynoldstallet. Erfaringen viser da, at luften strømmer jævnt og laminart omkring en kugle, hvis størrelsesordenen af Reynoldstallet er mindre end 1. Og helt hvirvlende og turbulent omkring ikke specielt strømlinede genstande, hvis størrelsesordenen af Reynoldstal er større end 10^6. Stemmer disse erfaringer med de to forskellige antagelser om strømningsmønstre ved løsningen af de to opgaver?

Med værdierne $0{,}66 \cdot 10^5$ s/m^2 for ρ/η af luft ved stuetemperatur, $r = 1$ m og $v = 100$ km/time $=$ 28 m/s, fås $Re = 2 \cdot 10^6$ vedrørende opgaven om benzinforbrug og CO_2-udledning ved bilkørsel. Altså en retfærdiggørelse af antagelsen om, at luftmodstanden imod bilen skyldes, at arbejdet, bilmotoren udfører, hænger sammen med den skabte energi i et hvirvlende og turbulent kølvand i luften efter bilen frem for umiddelbar gnidningsopvarmning af luften.

Indsættes værdierne $r = 0{,}005$ mm, $\rho_v = 1$ g/cm^3 $= 10^3$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2, og $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ kg/(m·s) for viskositeten af luft ved stuetemperatur, i formel (2), fås $v = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s for faldhastigheden i luft af en 0,005 mm stor mikrodråbe. Det betyder, at et fald på 2 m tager $\tau \approx 10$ minutter. Medens en 5 gange mindre dråbe, jævnfør ligning (3), vil holde sig svævende 25 gange længere tid, dvs. omkring 4 timer. Hvorimod en 5 gange større dråbe vil holde sig svævende omkring et halvt minut. Til sammenligning er $\tau = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 2/10}$ s = 0,6 s for faldtiden ved store dråbers frie fald. Den traditionelle skæring for, hvad der regnes for mikrodråber, er $r < 0{,}005$ mm. Altså svarende til, at dråberne hænger i luften i længere tid end netop 10 minutter.

Med værdierne $0{,}66 \cdot 10^5$ s/m^2 for ρ/η af luft ved stuetemperatur, $r = 0{,}005$ mm, og den fundne faldhastighed $v = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s, fås $Re = 10^{-3}$ vedrørende covidsmitte-opgaven. Antagelsen om, at luftstrømningen omkring en mikrodråbe er laminar, svarende til, at luftmodstanden hænger sammen med den gradvise overførsel af dråbens potentielle energi til gnidningsvarme i luften, og ikke til makroskopisk kinetisk energi i luften, kan altså også godtages.

Da de studerende, ud over papir og kuglepen, til eksamen som hjælpemiddel kun må medbringe et A4-ark beskrevet på begge sider efter eget valg, havde de ikke ved eksamen mulighed for at foretage disse kontroller af rimeligheden af grundantagelserne om strømningsmønstrene i de to tilfælde. De har måttet bero mere intuitivt på erfaringer fra lignende problemløsninger, og de blev bedømt herefter.

Hvordan skal man angribe problemer med Reynoldstal, der ikke er i ydergrænserne $Re < 1$ og $Re > 10^6$? Det er et emne, der beskæftiger mange, da det er vanskeligt at overskue, fordi den grundlæggende differentialligning er ulineær. Men det bør ikke skygge for, at mange situationer kan forstås simpelt, når Reynoldstallet befinder sig i en af ydergrænserne.

Ved små Reynoldstal kan der undertiden gennemføres matematisk analytiske beregninger, som fx udregningen af Stokes? lov for modstanden imod bevægelsen af en kugle, jf. ligning (1). I almindelighed er matematisk analytiske beregninger af luftmodstand komplicerede for genstande med andre former. Dimensionsanalyse viser da under alle omstændigheder, at luftmodstanden er givet ved en ukendt talfaktor gange $\eta\rho r$. Heraf følger fx opgavesvaret, at faldtiden for mikrodråberne er omvendt proportional med deres størrelse i anden potens. Men den ukendte talfaktor skal kendes, hvis udfordringen er at finde en nøjagtig kvantitativ værdi af faldtiden for en dråbe. Dog kan dimensionsanalytisk udledte resultater være til hjælp ved vurdering af størrelsesordener, da de ukendte talfaktorer i fysiske formler størrelsesordensmæssigt normalt ligger i intervallet mellem 10^{-1} og 10. En afvigelse af mikrodråbernes form fra at være kugleformede svarende til talfaktoren 6π i ligning (1) ændrer ikke afgørende ved den ovenstående vurdering af den størrelsesordensmæssige konsistens mellem laminar strømning og størrelsen af Reynoldstallet.

Der er ikke tradition i lærebogslitteraturen for ingeniører og fysikere for at begrunde hastighedskvadratisk luftmodstand ved store Reynoldstal ved hjælp af dimensionsanalyse. I betragtning af, at hastighedskvadratisk luftmodstand i praksis er hyppigt forekommende, kunne det ellers være på sin plads. Luftmodstanden anskues traditionelt som funktion af Reynoldstallet, hvori både ρ og η indgår. Hvordan da antage, at luftmodstanden er uafhængig af η som udgangspunkt for dimensionsanalysen ved store Reynoldstal? Hvis der ingen gnidning var i luften, svarende til $\eta = 0$, er der slet ingen luftmodstand ifølge d'Alemberts paradoks. Hvordan da sætte η lig med nul ved en dimensionsanalyseudregning af luftmodstanden ved store Reynoldstal? Svaret er, at det er nødvendigt at regne med gnidning i luften i grænselag ved overflader, som luften bevæger sig i forhold til. Det er gnidningen her, der skaber hvirvlerne i det turbulente kølvand efter en bevæget genstand. Men ved tilstrækkeligt store Reynoldstal er det ikke størrelsen af luftens viskositet, der afgør kølvandets udseende. Viskositetens betydning er analog til den statiske gnidningskoefficient ved ren rulning. Den statiske gnidningskoefficient skal ikke have nogen bestemt værdi, værdien skal blot være stor nok til, at ren rulning kan lade sig gøre. Størrelsen af den statiske gnidningskoefficient indgår ikke i formler for den rent rullende bevægelse, så længe bevægelsen forbliver rent rullende. Tilsvarende skal viskositeten ikke have nogen bestemt værdi for dannelsen af det hvirvlende kølvand, værdien skal blot være stor nok til, at det dannes. Kølvandet er ved store Reynoldstal for ikke for strømlinede genstande bestemt af genstandens størrelse og form, uafhængigt af størrelsen af η. Og da afhænger kølvandets makroskopiske kinetiske energi ikke af både η og ρ, men kun af ρ.

Breddeopgave 93. Bølgemodstand

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave til breddekurset på RUC (fra eksamen februar 2020, nr. 93 i rækken her i Kvant):

Et overfladeskib, der sejler med jævn hastighed på dybt vand, danner bølger. Den del af modstanden imod skibets bevægelse, der skyldes bølgedannelsen, kaldes bølgemodstanden. For at finde bølgemodstanden ved modelforsøg i en prøvetank skal det såkaldte Froudetal være det samme ved modelforsøget, som ved den modellerede sejlads. Hvad er formlen for Froudetallet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] J. H. Jensen (2013) "Introducing fluid dynamics using dimensional analysis", *Am. J. Phys.*, bind **81**, side 688-694.

Nyt fra foreningerne

ASTRONOMISK SELSKAB

Ny formand for Astronomisk Selskab

Astronomisk Selskab holdt lørdag den 17. april 2021 virtuel generalforsamling over zoom, hvor Christina Toldbo blev valgt som ny formand. Der blev rettet en tak til Andreas Kjær Dideriksen for hans indsats som formand. Andreas fortsætter i bestyrelsen som menigt medlem, og den øvrige bestyrelse forblev uændret fra sidste år. Bestyrelsen har konstitueret sig (se mere på www.astronomisk.dk).

SNU
SELSKABET FOR NATURLÆRENS UDBREDELSE
STIFTET 1824 AF H.C. ØRSTED

Generalforsamling i SNU

SNU har holdt generalforsamlingen via zoom den 26. april 2021. I sin beretning fortalte SNUs præsident, Dorte Olesen, at sommeren 2020 bød på åbning af den store vandreudstilling "H.C. Ørsted på ny – skønheden i naturen" i Rundetaarn. I løbet af udstillingsperioden 1.7.–27.9. var der 6 aftenforedrag i Rundetaarn, og alt i alt blev udstillingen besøgt af 102.752 besøgende. Derefter flyttede udstillingen videre til Syddansk Universitetsbibliotek i Odense, hvor den var åben fra 10.10.-6.12. og blev besøgt af 24.351 personer.

Årets foredragsrække over temaet "Ørsted i jubilæumsåret" var velbesøgt, men ikke alle kunne gennemføres på grund af COVID-19-nedlukningen. Carlsbergfondet finansierede videooptagelser af foredragene, som er blevet set af mange. Den planlagte uddeling af H.C. Ørstedmedaljer til to inspirerende grundskolelærere inden for naturvidenskab og teknik, sponsoreret af firmaet Haldor Topsøe A/S, måtte udskydes fra april til september 2020.

En særlig begivenhed var foredraget af modtageren af H.C. Ørstedguldmedaljen i fysik, professor Charles M. Marcus fra Niels Bohr Institutet. Udover det velbesøgte faglige foredrag, var der et egentligt overrækkelsesarrangement med Hendes Majestæt Dronningen på Glyptoteket.

Dorte Olesen rettede en speciel tak til SNUs frivillige projektleder for den store vandreudstilling, fhv. direktør, ph.d. Gregers Mogensen, og de mange andre frivillige, der har ydet en stor indsats for at gøre udstillingen til en succes, samt de mange fonde, der hjalp SNU til at kunne afholde en så utrolig udstilling. Det drejer sig om Otto Mønsteds Fond, Industriens Fond, William Demant Fonden, COWIfonden, Thomas B. Thriges Fond og Povl M. Assens Fond.

Det har også været en særlig fornøjelse igen at tage mere aktivt ejerskab til Selskabets fine H.C. Ørstedsamling, som siden midten af 1980'erne er blevet opbevaret på Teknisk Museum i Helsingør. Selskabet havde også påtaget sig at lave en H.C. Ørstedjubilæumspublikation på engelsk, og koordinere sin foredragsserie i 2020 med Videnskabernes Selskabs offentlige foredrag i anledning af HCØ2020-fejringen, og begge disse aktiviteter blev også gennemført trods de undertiden vanskelige vilkår grundet COVID-19-pandemien.

Afslutningsvis blev det nævnt, at SNU planlægger at engagere sig aktivt i Videnskabsåret 2022, og dette kræver en temmelig stor forberedelsesindsats her i 2021.