Gnidning, arbejde og varme
– breddeopgave 81 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 81 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 81. Gnidning, arbejde og varme

En stor kælk med et lad står stille på en spejlglat tilfrosset sø. Kælken sættes i bevægelse, fordi en postsæk kastes ud på ladet, hvor den bremses ned i forhold til ladet på grund af gnidning. Hvor langt har kælken flyttet sig, når postsækken ligger stille i forhold til kælken? Begrund svaret.

Løsning

Vi kalder positionen af postsækken x og positionen af kælken y, begge målt fra det sted postsæk og kælk var, da postsækken til en start landede på ladet. Gnidningskraften imellem postsæk og kælk under deres relative bevægelse er μmg, hvis vi kalder gnidningskoefficienten μ, postsækkens masse m og tyngdefeltstyrken for g.

Bevægelsesligningen for postsækkens bevægelse i forhold til isen er da:

$$m\ddot{x} = -\mu mg, \tag{1}$$

idet gnidningskraften fra slæden på postsækken er rettet modsat postsækkens bevægelse. Med v_0 for postsækkens fart før den lander på slæden, fås heraf:

$$\dot{x} = v_0 - \mu gt, \tag{2}$$

og

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2. \tag{3}$$

Bevægelsesligningen for slædens bevægelse i forhold til isen er, med M for slædens masse:

$$M\ddot{y} = \mu mg, \tag{4}$$

idet gnidningskraften fra postsækken på slæden er rettet i samme retning som slædens bevægelse. Idet slæden starter med at være i hvile i forhold til isen, fås heraf:

$$\dot{y} = \mu g t m/M, \tag{5}$$

og

$$y = \frac{1}{2}\mu g t^2 m/M. \tag{6}$$

Postsækken ligger stille i forhold til slæden, når den har mistet fart og slæden vundet fart, så de to hastigheder i forhold til isen er ens.

Ifølge ligningerne (2) og (5) er tidspunktet t_s, hvor det sker, givet ved $v_0 - \mu g t_s = (m/M)\mu g t_s$ eller $t_s = (v_0/\mu g)M/(M+m)$. Svaret på opgaven fås herefter ved at indsætte denne værdi af t i ligning (6), med resultatet:

$$y(t_s) = \frac{mMv_0^2}{2\mu g(M+m)^2}. \tag{7}$$

Så langt flytter slæden sig, før postsækken ligger stille på slæden.

Vi kan tilsvarende finde, hvor langt postsækken bevæger sig i forhold til isen, medens den bremses op på slæden, ved at indsætte værdien af t_s i ligning (3), med resultatet:

$$x(t_s) = \frac{(M+2m)Mv_0^2}{2\mu g(M+m)^2}. \tag{8}$$

Ved at trække udtrykket for $y(t_s)$ i ligning (7) fra udtrykket for $x(t_s)$ i ligning (8) kan vi finde, hvor langt postsækken glider henad slædens lad, før den ligger stille på slæden:

$$x(t_s) - y(t_s) = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(M+m)}. \tag{9}$$

Ved at lade $m/M \to 0$ i ligningerne (7) og (8) fås:

$$y(t_s) \to 0 \text{ og } \mu mgx(t_s) \to \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{10}$$

for $M/m \to \infty$.

Når slæden er meget tungere end postsækken, bevæger postsækken således ikke slæden. Samtidig ses det, at bremselængden for postsækken i denne grænse direkte kan findes ved at sætte størrelsen af gnidningskraftens negative arbejde på postsækken lig med sækkens tab af kinetisk energi.

Kommentar

Spørger vi om, hvor meget varme, der er udviklet under opbremsningen, lader det sig besvare ud fra impuls- og energibevarelse for det isolerede system postsæk plus slæde. For hastigheden af tyngdepunktet af systemet, som også er sluthastigheden af postsæk og slæde, når de til sidst følges ad, $v_{\rm cm}$, gælder ifølge impulsbevarelsen: $mv_0 = (m + M)v_{\rm cm}$, så vi har

$$v_{\rm cm} = \frac{mv_0}{M + m} \tag{11}$$

Ifølge energibevarelsen for det isolerede system postsæk plus slæde har vi da for varmeudviklingen Q:

$$Q = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)v_{\rm cm}^2 = \frac{Mmv_o^2}{2(M + m)} \tag{12}$$

Dette resultat kan også opnås ved at betragte gnidningskræfternes arbejde under opbremsningen.

Arbejdet udført af gnidningskraften på postsækken er negativt, da kraft og vej er modsatrettede. Det svarer til, at postsækken taber kinetisk energi. Ifølge mekanikkens arbejde-kinetisk energi-teorem har vi:

$$\mu mgx(t_s) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_{\rm cm}^2 = \frac{Mm(M + 2m)v_0^2}{2(M + m)^2} \tag{13}$$

Ved at anvende arbejde-kinetisk energi-teoremet finder vi det samme resultat for $x(t_s)$ som i ligning (8) mere umiddelbart end ved løsningen af bevægelsesligningerne. Tilsvarende fås det positive arbejde udført af gnidningskraften på slæden, ifølge arbejde-kinetisk energi-teoremet, og indsættelse af ligning (11), til at være:

$$\mu mgy(t_s) = \frac{1}{2}Mv_{\rm cm}^2 = \frac{Mm^2v_0^2}{2(M + m)^2}, \tag{14}$$

som umiddelbart giver svaret på opgaven i overensstemmelse med ligning (7).

Det er hurtigere at løse opgaven ved brug af mekanikkens arbejde-kinetisk energi-teorem end ved løsningen af bevægelsesligningerne som først gjort ovenfor. At det kan lade sig gøre, skyldes, at arbejde-kinetisk energi-teoremet, uanset om der er tale om konservative kræfter eller fx gnidningskræfter, er matematisk ækvivalent med Newtons anden lov for bevægelsen af et tyngdepunkt. At det er hurtigere, skyldes bl.a., at der allerede er foretaget en integration ved udledningen af arbejde-kinetisk energi-teoremet fra Newtons anden lov.

Ved at sammenholde ligningerne (12), (13) og (14), kan vi finde:

$$Q + \mu mgy(t_s) - \mu mgx(t_s) = 0. \tag{15}$$

Her står, at summen af den udviklede varme ved opbremsningen og gnidningskræfternes resulterende arbejde er nul. Er det en udgave af termodynamikkens første hovedsætning?

Nej! Ligning (15) udsiger ganske vist formelt set, at summen af den udviklede varme og gnidningskræfternes arbejde er nul for det isolerede system postsæk plus slæde. Men ligning (15) er ikke et udtryk for energibevarelse som overordnet princip. Den fremkommer via de kinetiske energier, som både optræder i arbejde-kinetisk energi-teoremet i ligningerne (13) og (14) og i den egentlige energibevarelse i ligning (12).

Begrebet "arbejde" bruges forskelligt i forbindelse med arbejde-kinetisk energi-teoremet og i forbindelse med termodynamikkens første hovedsætning. I mekanikken kan vi udtale os om arbejdet udført på postsæk og slæde hver for sig. Det første er negativt. Det andet er positivt. Men der er ikke tale om varmetilførsel til postsækken og varmeafgivelse fra slæden. Koblingen af arbejde og varme kan kun gøres for det samlede, isolerede system postsæk plus slæde.

For det samlede system gælder der termodynamisk set, at dets energi er bevaret, da der ikke bliver udført arbejde på det udefra og heller ikke bliver tilført varme udefra. Systemets energi består af den, på grund af impulsbevarelsen, konstante tyngdepunktsenergi $\frac{1}{2}(m + M)v_{\rm cm}^2$ plus en, derfor også, konstant indre energi. Til en start er systemet i termodynamisk uligevægt med indre energi – energien i tyngdepunktssystemet – i form af makroskopisk kinetisk energi. Gnidningskræfterne bringer herefter systemet i ligevægt ved at omdanne den indre kinetiske energi til termisk energi.

Det er ikke kun begrebet "arbejde", der sædvanligvis benyttes forskelligt i termodynamik og mekanik. Begrebet "varme" er i den termodynamiske tradition udtryk for energitransport ud og ind af et system. I mere daglig tale bruger vi ordet om fx den termiske energi udviklet på grund af gnidning.

Måden hvorpå ligning (15) blev udledt via de kinetiske energier gør, at den ikke kun gælder for tidspunktet t_s, men for ethvert tidspunkt t fra 0 til t_s. Differentieres ligningen, med t_s udskiftet med t, fås:

$$\dot{Q} = \mu mg(\dot{x} - \dot{y}) \tag{16}$$

For studerende, som endnu ikke er blevet forvirrede af den forskellige brug af begreberne arbejde og varme i mekanik og termodynamik, er denne ligning formentlig umiddelbart forståelig: tempoet, hvormed der udvikles gnidningsvarme mellem postsæk og kælk, er givet ved gnidningskraften imellem dem gange deres relative hastighed. Hvad andet kan tænkes?

Breddeopgave 82. Fugle

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2018, nr. 82 i rækken her i KVANT):

Lad os antage, at alle fugle, der er i stand til i vindstille at holde sig svævende over samme punkt af landskabet ved at baske med vingerne, kun varierer i størrelse: Deres form og måden, de bevæger vingerne på, antages at være ens. Hvordan afhænger frekvensen de basker med da af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.