Acceleration i inhomogent tyngdefelt
– breddeopgave 70 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 70 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 70: Acceleration i inhomogent tyngdefelt

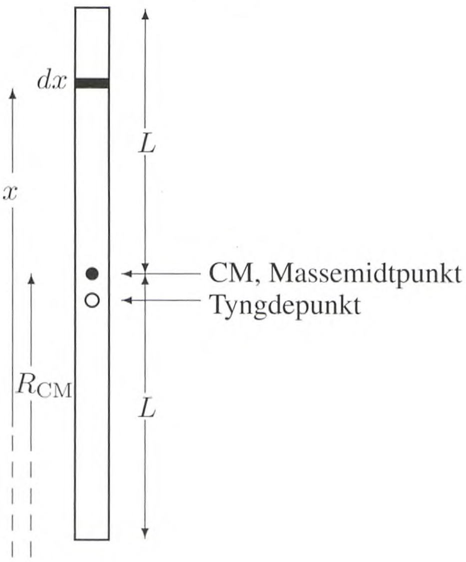
En frit svævende stang med retning mod Jordens centrum er så lang, at tyngdefeltet er af forskellig størrelse i de to ender af stangen. Hvor stor er stangens acceleration imod Jorden? Begrund svaret.

Løsning

På den lille del af stangen markeret som dx på figuren virker tyngdekraften

$$dF = G\frac{Mm\,dx}{2Lx^2} \tag{1}$$

hvor G er gravitationskonstanten, M Jordens masse, $2L$ og m stangens længde og masse, og x afstanden fra massedelen til Jordens centrum.



Den samlede tyngdekraft på stangen er derfor:

$$\begin{aligned} F &= G\frac{Mm}{2L}\int_{R_{\mathrm{CM}}-L}^{R_{\mathrm{CM}}+L}\frac{dx}{x^2} \\ &= G\frac{Mm}{2L}(-1)\left(\frac{1}{R_{\mathrm{CM}}+L}-\frac{1}{R_{\mathrm{CM}}-L}\right) \\ &= G\frac{Mm}{R_{\mathrm{CM}}^2}\frac{1}{1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2} \end{aligned} \tag{2}$$

hvor R_{CM} er afstanden fra Jordens centrum til stangens midtpunkt og massemidtpunkt CM.

Ifølge tyngdepunktssætningen er stangens masse gange massemidtpunktets acceleration, a, lig med den samlede kraft på stangen. Svaret på opgaven er derfor

$$a = \frac{GM}{R_{\mathrm{CM}}^2}\frac{1}{1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2}. \tag{3}$$

Kommentar

Opgaven her viser, at den danske sprogbrug, at kalde massemidtpunktet for tyngdepunktet, er sløset. Tyngdepunktssætningen burde hedde massemidtpunktssætningen, da det er bevægelsen af massemidtpunktet den vedrører. På figuren har jeg markeret stangens massemidtpunkt, og hvad der her giver mest mening at kalde et tyngdepunkt. Nemlig der, hvor tyngdekraften på stangens masse samlet i punktet er den samme som den samlede tyngdekraft på stangen. Kalder vi det således definerede tyngdepunkt for R_{GR}, ses af ligning (2), at

$$R_{\mathrm{GR}}^2 = R_{\mathrm{CM}}^2\left(1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2\right), \tag{4}$$

eller for $L \ll R_{\mathrm{CM}}$:

$$R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}}\sqrt{1-\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2} \approx R_{\mathrm{CM}} - \frac{L^2}{2R_{\mathrm{CM}}}. \tag{5}$$

Afstanden imellem tyngdepunktet og massemidtpunktet er derfor for realistiske stanglængder stærkt overdrevet på figuren.

Kalder vi accelerationen, som stangen ville have, hvis al dens masse var samlet i dens massemidtpunkt, a_{CM}, viser ligning (3), at vi for $L \ll R_{\mathrm{CM}}$ har

$$\begin{aligned} a &= a_{\mathrm{CM}}\left(1-\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right)^{-1} \\ &\approx a_{\mathrm{CM}}\left(1+\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right), \end{aligned} \tag{6}$$

altså en relativ afvigelse af a fra a_{CM} på

$$\frac{a - a_{\mathrm{CM}}}{a_{\mathrm{CM}}} \approx \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2. \qquad (7)$$

På et geofysikkursus for en del år siden erfarede jeg, at man med et såkaldt gravimeter kunne måle afvigelsen af tyngdefeltstyrken ved Jordens overflade, når gravimeteret blev flyttet fra gulvet op på et bord. Idet tyngdefeltstyrken $g(r) = GM/r^2$, og derfor $dg/g = -2dr/r$, fås med $dr \approx 1$ m og $r \approx 6000$ km, at gravimetret må have kunnet måle med en relativ nøjagtighed på 10^{-6} eller mindre. Hvis vi kunne bruge gravimetret til at måle forskellen mellem tyngdefeltstyrken i tyngdepunktet, som er lig med a, og tyngdefeltstyrken i massemidtpunktet, som er lig med a_{CM}, ses det af ligning (7) og $R_{\mathrm{CM}} \approx 6000$ km, at længden af en stang nær Jordens overflade skal være større end $2L = 2R_{\mathrm{CM}} \cdot 10^{-3} \approx 10$ km for at gravimeteret ville kunne registrere forskellen. Den praktiske betydning af svaret på breddeopgave 70 er derfor nok ikke stor.

Men regnestykket er selvfølgelig en påmindelse om, at ækvivalensen imellem acceleration og tyngdekraftfelt kun gælder infinitesimalt. Lange og korte stænger falder ikke lige hurtigt. Hvis de er rettet radialt i forhold til Jorden falder de hurtigere, jo længere de er.

For stænger liggende på tværs af retningen imod Jorden falder de lange stænger langsommere end de korte. Jeg vil overlade udregningen til læserne. For stænger på tværs finder jeg svarende til ligning (6) for stænger på langs:

$$\begin{aligned} a &= a_{\mathrm{CM}} \left(1 + \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx a_{\mathrm{CM}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right). \qquad (8) \end{aligned}$$

For stænger på tværs finder jeg modstykket til ligning (5) til at være:

$$R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2} \approx R_{\mathrm{CM}} + \frac{L^2}{4R_{\mathrm{CM}}}. \qquad (9)$$

Modsat situationen for stænger på langs gælder det for stænger på tværs, at deres tyngdepunkt er længere væk fra Jorden end deres massemidtpunkt.

Kun for kuglesymmetriske massefordelinger gælder ifølge Newtons teorem, at $R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}}$, og derfor $a = a_{\mathrm{CM}}$, og følgelig at store og små genstande falder lige hurtigt.

Galilei argumenterede overbevisende for, at lette og tunge genstande falder lige hurtigt. Hvis vi f.eks. antager, at tunge genstande falder hurtigere end lette, så vil en let genstand sammenbundet med en tung genstand holde den tunge tilbage i faldet, så den falder langsommere, end hvis den faldt frit. Men tilsammen vil de to sammenbundne genstande ifølge antagelsen på den anden side udgøre en genstand tungere end den tunge, hvorfor den tunge genstand sådan anskuet vil falde hurtigere, end hvis den var fri. Antagelsen om at tunge genstande falder hurtigere end lette må derfor være forkert, da den fører til logisk modstrid.

Der er ikke noget i vejen med Galileis argument. Det handler om tunge og lette genstande. Men i inhomogene tyngdefelter viser opgavebesvarelsen, at argumentet ikke kan overføres til store og små genstande. Normalt falder store og små genstande som vist ikke lige hurtigt.

Breddeopgave 71 og 72. Tidevandsfelter

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse opgaver fra breddekurset på RUC (fra henholdsvis sygeeksamen august 1983 og sygeeksamen september 1987, nr. 71 og 72 i rækken her i KVANT):

71. Hvordan kan det være, at det med god tilnærmelse går godt at regne med, at inertiens lov gælder i et koordinatsystem med centrum i Solen og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse, når vi ved, at Solen deltager i galaksens rotation?

72. Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.

Den anden af opgaverne har været behandlet tidligere i KVANT, juli 2008. Løsningen dengang er rigtig. Men siden er jeg kommet på bedre tanker angående begrundelsen for den rigtige løsning. De bedre tanker bringes sammen med løsningen til den første opgave i næste nummer af KVANT.