Bohrs atommodel – breddeopgave 68 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 68 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 68. Bohrs atommodel

Niels Bohr blev i 1913 ført på sporet af sin model for brintatomet ved at bemærke, at det ikke er muligt at danne en karakteristisk længde svarende til atomets størrelse fra naturkonstanterne m_e, elektronens masse, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$, konstanten i Coulombs lov, der er de naturkonstanter, der kan indgå i resultatet af en klassisk beregning. Hvis derimod h, Plancks konstant, inddrages, fremgår der herved en karakteristisk længde af den rigtige størrelsesorden. Hvordan er Bohrradius givet ved m_e, h, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$? Begrund svaret.

Løsning

Dimensionen af m_e er masse, M. Dimensionen af $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ er ifølge Coulombs lov kraft gange længde i anden potens, M L^3 T^{-2}. Det ses, at dimensionen af ethvert produkt af en potens af m_e og en potens af $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ indeholder basisdimensionen tid i en eller anden potens. Det er derfor ikke muligt at lave et potensprodukt af de to naturkonstanter med alene dimensionen længde. Men billedet skifter, hvis vi yderligere inddrager Plancks konstant, der har dimensionen energi gange tid, M L^2 T^{-1}. Så giver kombinationen

$$b\frac{h^2}{m_e e^2/(4\pi\varepsilon_0)} = b\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2} \qquad (1)$$

hvor b er en dimensionsløs talfaktor, en fysisk størrelse med dimensionen længde. Vælges talfaktoren til at være $b = (2\pi)^{-2}$, er dette radius af brintatomet i grundtilstanden ifølge Bohrs atommodel, altså Bohrradius. Bortset fra den ukendte talfaktor tillader dimensionsanalysen ikke andre mulige svar på opgaven. Enhver model eller teori, der benytter h, m_e og $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ som inputparametre, vil nødvendigvis levere svaret (1). Derfor er det heller ikke overraskende, at den kvantemekaniske udregning ud fra Schrödingerligningen, som har de samme inputparametre, fører til samme resultat som Bohrs atommodel.

Kommentar

At Niels Bohr var hjulpet af dimensionsovervejelser på vej til sin atommodel fremgår bl.a. af følgende citat fra "Om Brintspektret", *Fysisk Tidsskrift*, vol. **12**, 1913:

"At man ikke kan komme nogen Vegne med et saa simpelt System, som det vi betragter, kunde man have forudsagt allerede udfra en Dimensionsbetragtning; man kan nemlig ikke ved Hjælp af e og m alene bestemme en Størrelse, der kan tydes som en Diameter af et Atom ..." (Her står m for elektronens masse og e for $e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, da Bohr anvender det Gaussiske system.)

I indledningen i "On the Constitution of Atoms and Molecules", Philosophical Magazine, vol. 26, 1913, findes bl.a. denne dimensionsovervejelse:

"Whatever the alteration in the laws of motion of electrons may be, it seems necessary to introduce in the laws in question a quantity foreign to the classical electrodynamics, i.e. Planck's constant, or as it often is called the elementary quantum of action. By the introduction of this quantity the question of the stable configuration of the electrons in the atoms is essentially changed, as this constant is of such dimensions and magnitude that it, together with the mass and charge of the particles, can determine a length of the order of magnitude required."

I øvrigt vil kommentaren her, som annonceret i min forrige artikel i KVANT, dreje sig om dimensionsanalyse mere generelt.

Dimensionsanalyse med det formål at udtrykke en fysisk størrelse Q_1 som funktion af en række andre bestemmende fysiske størrelser, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, altså at finde en formel for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$, består i almindelighed af to skridt. Det første - og sværeste - skridt består i at udvælge de inputparametre, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, der er relevante for Q_1. Dette skridt kommenterede jeg i min forrige artikel. Når inputparametrene er valgt består det andet skridt i at søge den efterspurgte formel blandt de dimensionsmæssigt tilladte.

Da fysiske størrelser med forskellig dimension, fx en længde og en masse, ikke meningsfuldt kan lægges sammen, hvorimod de kan ganges og divideres med hinanden til nye størrelser med nye dimensioner, fx massefylde med dimensionen masse divideret med længde i tredje potens, skal de dimensionsmæssigt tilladte formler søges blandt:

$$Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...) = g\, Q_2^{\alpha}\, Q_3^{\beta}\, Q_4^{\gamma}... \tag{2}$$

ved at vælge α, β, γ, ... således, at højre og venstre side får samme dimension, og hvor g er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse bestemmende fysiske størrelser eller dimensionsløse kombinationer af bestemmende fysiske størrelser.

Det kan tænkes, at der er flere måder at vælge α, β, γ, ... på, som tilfredsstiller kravet om ens dimension på de to sider af ligning (2), resulterende i forskellige fysiske størrelser A, B, ... , der alle har dimension som Q_1, hvorved Q_1 kan fremstilles som en linearkombination af A, B, ... Men da $aA + bB + ... = A(a + bB/A + ...)$, kan vi i det tilfælde genetablere ligning (2)'s måde at udtrykke $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$ på ved at inkludere den dimensionsløse parentes i g faktoren. Som en konsekvens af, at fysiske størrelser med forskellig dimension alene kan multipliceres og ikke adderes, repræsenterer ligning (2) derfor alle tænkelige formler for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$.

I litteraturen skelnes der mellem en intuitiv tilgang til dimensionsanalyse og dimensionsanalyse gennemført i kraft af det såkaldte Buckinghams Π-teorem. (Se fx T. Misic, M. Najdanovic-Lukic, and L. Nesic, "Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem," *Eur. J. Phys.* **31**, 893-906 (2010).) Efter min vurdering er der ikke tale om to væsensforskellige tilgange til dimensionsanalysen, hvorfor jeg har sammenfattet dem i ligning (2).

Den intuitive tilgang er den, hvor faktoren g i ligningen er enkel at overskue. Lad os illustrere den intuitive tilgang ved den formelle brug af ligning (2) på Bohrradius-eksemplet. Her har ligning (2), med a_0 som Bohrradius, udseendet

$$a_0(h, m_e, e^2/(4\pi\varepsilon_0)) = g h^{\alpha} m_e^{\beta} (e^2/(4\pi\varepsilon_0))^{\gamma}. \tag{3}$$

Da g er dimensionsløs, følger heraf

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0 &= \mathrm{L} = [a_0] = [h^{\alpha} m_e^{\beta} (e^2/(4\pi\varepsilon_0))^{\gamma}] && (4)\\ &= (\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1})^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}(\mathrm{ML}^3\mathrm{T}^{-2})^{\gamma} && (5)\\ &= \mathrm{M}^{\alpha+\beta+\gamma}\mathrm{L}^{2\alpha+3\gamma}\mathrm{T}^{-\alpha-2\gamma}, && (6) \end{aligned}$$

hvor fx $[a_0]$ skal læses som dimensionen af a_0. Da M, L og T som valgte basisdimensioner ikke kan reduceres til hinanden, skal deres potenser i ligning (4) stemme overens hver for sig. Det giver ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 0 = \alpha + \beta + \gamma && (7)\\ \mathrm{L}: &\quad 1 = 2\alpha + 3\gamma && (8)\\ \mathrm{T}: &\quad 0 = -\alpha - 2\gamma && (9) \end{aligned}$$

med den entydige løsning $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. Indsat i ligning (3) fås herefter vores resultat fra ligning (1) igen. Hvad med faktoren g i ligning (3)? Den er et rent tal, da der ikke indgår dimensionsløse fysiske inputstørrelser i problemet, og da h, m_e og $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ ikke kan kombineres til en dimensionsløs størrelse. Det fremgår af, at hvis ligningssystemet (7)-(9) havde lutter nuller på venstresiderne, ville det have den entydige løsning $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Når g blot er et tal, drejer dimensionsanalyse sig alene om at finde de rigtige potenser på inputparametrene.

Dimensionsanalyse ved hjælp af Buckinghams Π-teorem svarer til ligning (2), hvor faktoren g er kompleks og sværere at overskue. Lad os illustrere ved eksemplet den hydrodynamiske tværkraft, Magnuskraften, på et roterende kugleformet legeme i bevægelse gennem et medie. Eksemplet viser også det usædvanlige, at implicitte videnskabsteoretiske fortolkninger af fysik kan have kontante fysikfaglige konsekvenser.

Magnus-kraften må afhænge af radius r, størrelsen af translationshastigheden v, og størrelsen af vinkelhastigheden ω af det kugleformede legeme.

Størrelsen af Magnus-kraften må også afhænge af vinklen mellem translationshastigheden og rotationshastigheden, θ. Endelig må den afhænge af massefylden ρ og viskositeten η af mediet. Hvis vi antager mediet for at være usammentrykkeligt, er det svært for den trænede fysiker at tænke på inputvariable herudover. Vi vil derfor spørge om, hvordan størrelsen af Magnus kraften F afhænger af de nævnte parametre. Hvordan ser funktionen $F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta)$ ud?

Svarende til ligning (2) skal funktionen søges blandt:

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = g r^{\alpha} v^{\beta} \omega^{\gamma} \theta^{\delta} \rho^{\epsilon} \eta^{\zeta} \tag{10}$$

Da g og θ er dimensionsløse, følger heraf

$$\begin{aligned} \mathrm{MLT}^{-2} &= [\mathrm{F}] = [r^{\alpha} v^{\beta} \omega^{\gamma} \theta^{\delta} \rho^{\epsilon} \eta^{\zeta}] && (11)\\ &= \mathrm{L}^{\alpha}(\mathrm{LT}^{-1})^{\beta}(\mathrm{T}^{-1})^{\gamma}(\mathrm{ML}^{-3})^{\epsilon}(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^{\zeta} && (12)\\ &= \mathrm{M}^{\epsilon+\zeta}\mathrm{L}^{\alpha+\beta-3\epsilon-\zeta}\mathrm{T}^{-\beta-\gamma-\zeta}. && (13) \end{aligned}$$

Kravet om ens potenser af basisdimensionerne giver os derfor ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 1 = \epsilon + \zeta && (14)\\ \mathrm{L}: &\quad 1 = \alpha + \beta - 3\epsilon - \zeta && (15)\\ \mathrm{T}: &\quad -2 = -\beta - \gamma - \zeta. && (16) \end{aligned}$$

I ligningssystemet (7)-(9) var der tre ligninger med tre ubekendte. Nu har vi tre ligninger med fem ubekendte, og derfor ikke én men en uendelighed af løsninger. Men vi kan dog benytte ligningssystemet til at reducere graden af uendelighed ved ud fra ligningerne fx at finde α, β og ϵ udtrykt ved γ og ζ. Af ligningssystemet (14)-(16) findes $\alpha = 2 + \gamma - \zeta$, $\beta = 2 - \gamma - \zeta$, og $\epsilon = 1 - \zeta$. Indsættes dette i ligning (10) fås:

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = g\rho r^2 v^2 (r\omega/v)^{\gamma} \theta^{\delta} (\eta/\rho r v)^{\zeta}. \tag{17}$$

Dette er en mulig repræsentation af de af funktionerne givet ved ligning (10), der opfylder kravet om ens dimension på begge sider af ligningen. Eksponenterne γ, δ, og ζ for de indbyrdes fysisk uafhængige dimensionsløse størrelser $r\omega/v$, θ og $\eta/(\rho r v)$ kan vælges vilkårligt. Vi kan derfor ikke umiddelbart vide noget om, hvordan F afhænger af de tre dimensionsløse størrelser. Men g må kunne beskrives som en ukendt funktion alene af disse tre størrelser. Det fremgår både af ligning (17) og af ligningssystemet (14)-(16) med bare nuller på venstresiderne, at andre dimensionsløse potensprodukter af $r, v, \omega, \theta, \rho$, og η end $r\omega/v$, θ og $\eta/(\rho r v)$ alene er indbyrdes potensprodukter af disse tre. Da $\rho r v\eta/ = R_e$, det såkaldte Reynoldstal, kan ligning (17) derfor omformuleres til

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = C_L(r\omega/v, \theta, R_e)\rho r^2 v^2, \quad (18)$$

hvor den ukendte dimensionsløse funktion af de dimensionsløse argumenter $r\omega/v$, θ og R_e er kaldt C_L (lift coefficient) i overensstemmelse med sædvanen. Ved hjælp af dimensionsanalysen har vi altså fået indsnævret parameterrummet for empirisk kortlægning fra at være 6-dimensionalt til at være 3-dimensionalt. Som sagt svarer analysen her til at anvende Buckinghams Π-teorem.

I 2013 har G. Robinson og I. Robinson skrevet en artikel med titlen "The motion of an arbitrarily rotating spherical projectile and its application to ball games" (*Phys. Scr.* **88**, 018101), hvor de modellerer C_L ved at antage den uafhængig af R_e og v og samtidig afhængig af ω svarende til rapporterede måledata. I en kommentar hertil (*Phys. Scr.* **89**, 067001) gjorde jeg med henvisning til ligning (18) opmærksom på, at Robinsons og Robinsons antagelser ikke lader sig gøre af dimensionsanalytiske grunde. Hvis C_L er uafhængig af R_e, afhænger den udover af θ alene af $r\omega/v$ ifølge ligning (18). Det betyder, at ω-afhængigheden sker via argumentet $r\omega/v$. Derfor kan C_L ikke samtidigt antages uafhængig af v, da argumentet jo afhænger af v.

Svaret fra Robinson og Robinson hertil (*Phys. Scr.* **89**, 067002) er interessant i sammenhæng med dimensionsanalyse i det hele taget. I det væsentlige svarede de, at deres beregninger var dimensionsmæssigt rigtige, idet enhederne i beregningerne var korrekt afstemte. Hvilket ikke var anfægtet af mig.

For Robinson og Robinson forstås fysiske formler tilsyneladende som sammenfatninger af måledata. I modsætning hertil opfattes fysiske formler ved dimensionsanalyse som teoretiske udsagn om sammenhænge imellem fysiske størrelser, hvor dimensionsanalysen da er en metaanalyse af de teoretiske konsekvenser af teoretiske og modelleringsmæssige antagelser. Robinsons og Robinsons forståelse af fysiske formler svarer til en induktiv opfattelse af fysik på linje med fx de logiske positivisters. I modsætning hertil svarer dimensionsanalysens abstrakte konsekvensundersøgelser af hypoteser om, hvilke inputparametre, der kan være afgørende for givne problemstillinger, snarere til Poppers hypotetisk-deduktive opfattelse af et fag som fysik.

Undervejs i beslutningsprocessen angående SI systemet viste sig den samme dobbelthed i forståelsen af, hvad fysiske formler drejer sig om. I artiklen "On the history of quantity calculus and the international system" (*Metrologia* **31** 405-29) fra 1995 skriver J. de Boer således: "...: it appears to be extremely important to keep in mind that scientists may attach different meanings to terms and the symbols used in the mathematical representation of the facts of physics."

Det er for mig overraskende, at den videnskabsteoretiske fortolkning af fysik kan have så kontante fysikfaglige konsekvenser, som Magnuskraft-eksemplet viser.

Breddeopgave 69. Tøndefald

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2015, nr. 69 i rækken her i KVANT):

På ladet af en bil, der holder stille, er en cylinderformet tønde blevet glemt. Den ligger op ad forhuset med aksen vinkelret på køreretningen. Lastbilen speeder op for at køre. Hvor langt når den at køre før tønden ruller ud over den åbne bagende af ladet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.