Raketligningen og Keplers anden lov
– breddeopgave 56 og 57 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

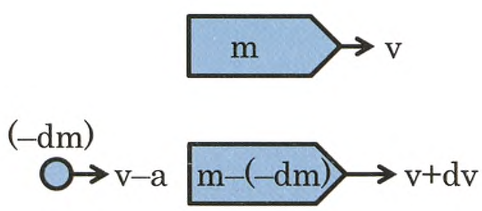
Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 56 og 57 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 56 og 57. Raketligningen og Keplers 2. lov
Forklar virkningen af en raketmotor i det lufttomme rum.

Ifølge Keplers anden lov overstryger forbindelseslinjen fra Solen til en planet lige store arealer i lige store tidsrum. Forklar loven.

Løsning

56. En raketmotor virker ved, at der løbende sparkes materiale bagud. På figur 1 (øverst) har vi raketten med hastigheden v, i forhold til fx Jorden, og massen m, til tiden t. På figur 1 (nederst) har vi den samme masseansamling som på den foregående figur, men til tiden $t + dt$. I mellemtiden er massedelen $-dm$ (raketmassens tilvækst er negativ) fyret baglæns ud af raketten med udstødningsfarten a i forhold til raketten, og farten $v - a$ i forhold til Jorden. Raketten har nu massen $m - (-dm)$ og hastigheden $v + dv$ i forhold til Jorden.



Figur 1. Øverst: Raket med brændstof til tiden t. Nederst: Samme masseansamling til tiden $t + dt$.

Da den betragtede masseansamling er et isoleret system, er den samlede impuls den samme til tiden t og til tiden $t+dt$:

$$mv = (-dm)(v - a) + (m - (-dm))(v + dv). \qquad (1)$$

Idet der kan ses bort fra leddet $dm\,dv$ i grænsen for små tilvækster, fås heraf $dv = -a\; dm/m$, og ved integration:

$$v_{\text{slut}} - v_{\text{start}} = a \ln \frac{m_{\text{start}}}{m_{\text{slut}}}. \qquad (2)$$

Ligningen viser, hvordan øgningen af rakettens hastighed afhænger af udstødningshastigheden fra raketmotoren og mængden af materiale sparket bagud. Med $v_{\text{start}} = 0$ kan ligningen omskrives til:

$$m_{\text{start}} = m_{\text{slut}} \exp\left(\frac{v_{\text{slut}}}{a}\right), \qquad (3)$$

der viser, hvor stor en startmasse der skal til, for at tildele en given slutmasse hastigheden v_{slut}.

57. Hvis $A(t)$ er arealet, som forbindelseslinien fra Solen til en planet har overstrøget i dens elipsebane siden $t = 0$, er $dA(t)/dt$ givet som afstanden $r(t)$ fra Solen til planeten gange en halv gange hastighedskomposanten vinkelret på forbindelseslinjen. Derfor har vi:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r(t)\, r(t) \frac{d\Theta(t)}{dt}, \qquad (4)$$

hvor $\Theta(t)$ er ændringen af retningen til planeten set fra Solen siden $t = 0$.

Højresiden af ligning (4) er, bortset fra den manglende massefaktor, også det halve af planetens impulsmoment omkring Solen. Da gravitationskraften fra Solen på planeten er i retning af forbindelseslinjen, giver den ikke anledning til noget kraftmoment omkring Solen. Følgelig er impulsmomentet og højresiden af ligning (4) konstant. Derfor har vi:

$$A(t) = \text{konstant} \cdot t, \qquad (5)$$

hvilket jo indebærer, at lige store arealer overstryges i lige store tidsrum.

Kommentar

1. En af mine yndlingsreferencer er et citat fra den russiske anarkist og geograf P. Krapotkin's "Haandens og Hjærnens Arbejde", skrevet i 1898 (side 198 i den danske udgave fra 1904):

"Set i dette Lys er de Resultater, man har naaet i Moskva-Skolen, aldeles ikke forbavsende, og man kunde rimeligvis naa endnu videre, hvis man allerede i de første Undervisningsaar begyndte at anvende disse Principper for Opdragelsen. Vort nuværende Undervisningssystem udmærker sig især ved, at *Tiden bortødsles* paa rent uforsvarlig Maade. Ikke alene lærer vi en Mængde overflødige Ting, men det, der ikke er overflødigt, bliver bibragt os paa en Maade, saa at vi spilder saa megen Tid som vel muligt derved.

Vore nuværende Undervisningsmetoder stammer fra en Tid, da de Fordringer, der stilledes til et Menneskes Dannelse, var yderst beskedne, og vi er blevne staaende ved dem til Trods for, at Fordringerne til Kundskab er stegne uhyre, efter at Videnskaben saa stærkt har udviklet sit før meget begrænsede Felt. Deraf følger, at *Eleverne overlæsses*. Det bliver imidlertid tvingende nødvendigt at underkaste baade Undervisningsstoffet og Undervisningsmaaden en alvorlig Revision, der svarer til de nye Fordringer og til de Eksempler, som allerede nogle Skoler og enkelte Lærere har givet os." (mine fremhævelser)

Som efterlignelsesværdigt eksempel omtaler Krapotkin først og fremmest den nævnte Moskvaskole, som er en teknisk skole i Moskva. Her bliver i fx geometriundervisningen "hver Sætning stillet som en Opgave, Beviset gives ikke paa Forhaand, Eleven bliver nødt til selv at finde det." I modsætning til den normale geometriundervisning. Her "spildes Tiden ganske taabeligt ved at anvende en Metode, der nærmest lægger Vægt paa Udenadslæren. I de fleste Tilfælde læser Eleven Beviset for en Læresætning om og om igen, indtil det rent mekanisk fæster sig i hans Hukommelse."

Den opmærksomme læser kan måske gætte, at jeg, siden jeg holder af citatet, regner Breddekurset på RUC for at være et sidestykke til Krapotkint's Moskvaskole, hvor tiden ikke bortødsles og eleverne ikke overlæsses. Svarene på de to opgaver i artiklen her er ofte lærebogsstof i introducerende fysikundervisning på universitetsniveau. På breddekurset har der ikke været undervist i de to problemer forud for de eksamener, hvor de blev stillet som eksamensopgaver. Sidenhen har de to problemer indgået i samlingen af tidligere eksamensopgaver, der er det afgørende udgangspunkt for undervisningen. Lærebogen er supplerende læsning i forhold til opgavesamlingen. For ikke at være udelukket fra at stille opgaver, som de to her, må der ikke medbringes bøger m.m. til eksamen.

Udover, at Krapotkin-citatet kan bruges til at fremføre egne synspunkter, er det også nyttigt til at vise, at brydningen mellem deduktivt, docerende og induktivt, aktiverende undervisningsstrategier, ikke er af ny dato. Citatet er ikke uaktuelt nu mere end hundrede år senere. Moskvaskolens og Breddekursets undervisningspraksis er eksempler på kompetencestyret frem for pensumstyret undervisning. Det tales der meget om i disse år. Men det praktiseres i meget begrænset omfang.

2. Min far, Henning Højgaard Jensen, gjorde mig engang opmærksom på en artikel (J. W. Campbell, "Rocket Flight to the Moon", *Philosophical Magazine*, 1941 I, p. 24-34.) med anknytning til besvarelsen af opgave 56.

I artiklen argumenteres der for, at det aldrig vil lykkes at bringe mennesker til Månen og tilbage igen, fordi værdien af eksponentialfunktionen i ligning (3) er for stor. Hvis raketten brænder al sit brændstof af nær Jorden, skal den, for at nå til Månen, herved ca. opnå løsrivelseshastigheden fra Jordens tyngdefelt, $v_{\text{slut}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} = 11{,}2$ km/s. Til sammenligning hermed er de opnåelige udstødelseshastigheder ved brug af kemisk brændstof ca. $a = 2{,}5$ km/s, når der tages højde for hvor høje temperaturer raketmotorens materialer kan tåle, og hvor små udstødningspartikler, der kan produceres. Og det giver ifølge ligning (3) en faktor 88 for forholdet mellem startmassen og slutmassen. For at få en nyttelast svarende til en bil sendt til Månen skal der altså sendes en masse svarende til et rådhustårn af sted til en start.

Der er ikke her taget højde for massen af brændstofbeholderen og benyttelsen af flertrinsraketter for at skaffe sig af med tømte brændstofbeholdere. Der er heller ikke taget højde for den varierende styrke af tyngdefeltet og luftmodstanden under opsendelsen. Disse forhold medfører mindre korrektioner. Det afgørende er eksponentialfunktionen i ligning (3). Og det afgørende for Campbells fejlagtige forudsigelse er, at han opløfter den til anden potens, fordi han forestiller sig, at nedbremsningen ved tilbageturen fra Månen skal foregå ved brug af brændsel tilsvarende brugen ved udturen. Han når herved frem til, at en sådan raketfærd vil kræve en raket, hvis masse til en start var som massen af Mt. Everest! For at bringe en nyttelast svarende til en bil tilbage til Jorden fra Månen må en raket som et rådhustårn sendes til Månen, og for at gøre det må der altså startes ud med en raket af størrelse som Mt. Everest. Og det vil rent praktisk aldrig ske.

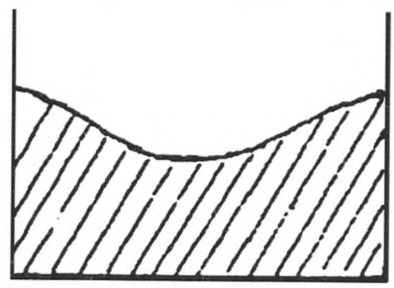
Historien er efter min mening en god illustration af, hvad der kan gøre videnskab dårlig. Videnskab er dårlig, hvis: a) for meget er overset; b) der ikke er set bort fra tilstrækkelig meget. I tilfældet Campbell overser han muligheden af at nedbremse raketten ved hjælp af luftmodstanden i atmosfæren. Til gengæld er hans regnestykker ganske omfattende med mange detaljeovervejelser sammenlignet med den lige vej til ligning (3). I en senere dansk artikel (E. Buch Andersen, "Rumfartsproblemet", *Fysisk Tidsskrift*, **45**, 1947, p. 105-113.) når Andersen på samme måde som Campbell frem til, at en månefærd baseret på nedbremsning ved udstødning af forbrændingsprodukter i fartretningen er teknisk uigennemførlig. Men i modsætning til Campbell overser han ikke nedbremsning i kraft af luftmodstanden i atmosfæren som den fremtidige mulighed.

Breddeopgave 58 og 59. Centrifuge og tehvirvel

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra samlingen af breddeopgaver fra opstarten af breddekurset i 1976 og fra vintereksamen 2008, nr. 58 og 59 her i rækken i KVANT):

Hvilken form har overfladen af en væske i en centrifuge? Begrund svaret.

Når der røres rundt i en kop te eller et glas vand, stiller overfladen sig typisk som antydet på figuren:



Hvad viser det om væskebevægelserne? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.