Skorstensknæk – breddeopgave 44 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

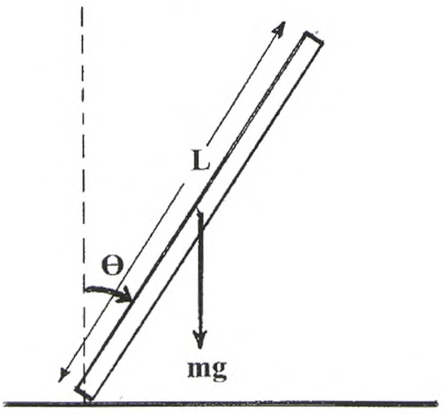
Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne opgave (nr. 44 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 44. Skorstensknæk

Hvor knækker en væltende murstensskorsten i faldet? Begrund svaret.

Figur 1. Faldende skorsten (billede fra "Physics in the Toy Room: Toppling Towers", www.physicscentral.com).



Figur 2. Faldende skorsten.

Løsning

Selvom svaret på opgaven er enkel, er løsningen det ikke.

Så længe skorstenen i sin helhed drejer om sit fodpunkt, fås med betegnelserne på figur 2:

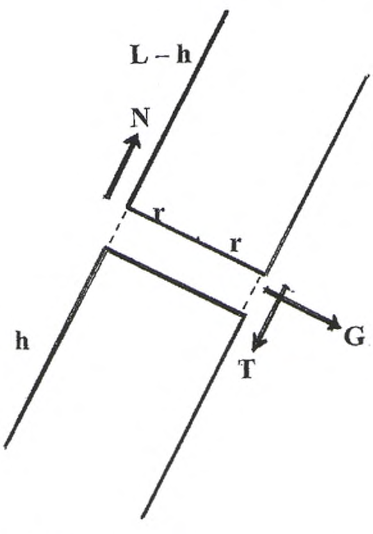
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta), \qquad (1)$$

som følge af energibevarelse. Og ifølge momentsætningen med momenter taget om fodpunktet har vi:

$$\frac{1}{3}\cdot mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\frac{L}{2}\sin\theta, \qquad (2)$$

idet skorstenen er antaget overalt at have samme tværsnit, og vi i beregningen af inertimomentet $\frac{1}{3}\cdot mL^2$ i de to ligninger har set bort fra bredden af skorstenen.

Hvis skorstenen, som det ofte ses, knækker i to stykker i faldet, vil den øverste del falde bagover i forhold til den underste del. Af både ligning (1) og ligning (2) ses, at skorstenen falder langsommere jo større dens højde er. Før den knækker, er det derfor den nederste del af skorstenen, der trækker den øverste del med sig, medens den øverste del holder den nederste tilbage i faldet. Og derfor er det den nederste del, der løber fra den øverste, når skorstenen knækker. Når skorstenen er knækket, vil dens nederste del fortsætte sit fald med en øgende vinkelhastighed i overensstemmelse med ligning (2) med en justeret værdi af L. Medens dens øverste del vil dreje med konstant vinkelhastighed, da der da ikke er noget kraftmoment om delens massemidtpunkt.



Figur 3. Snit vilkårligt sted i faldende skorsten.

At svare på, ikke hvad der sker, når skorstenen er knækket, men hvor skorstenen knækker, hvis den knækker, er ikke så lige til. Et tilnærmet svar kan gives, hvis vi regner på en forenklet model af skorstenen. Vi tænker på skorstenen som en stabel skiver fæstnet til hinanden i de to yderpunkter i faldretningen som antydet på figur 3. Herefter må vi fx anvende momentsætningen om tyngdepunktet og tyngdepunktssætningen for en vilkårlig øvre del af skorstenen som den på figuren. Så længe de to dele hænger sammen som en helhed, vil den øverste del være påvirket af et kraftmoment omkring sit tyngdepunkt hidrørende fra berøringskræfterne fra den underste del svarende til vinkelaccelerationen givet ved ligning (2) og være påvirket af en resulterende kraft hidrørende fra tyngden og berøringskræfterne fra den underste del svarende til accelerationen af den øverste dels tyngdepunkt givet ved ligning (1) og ligning (2). På figur 3 er berøringskræfterne angivet som en samlet statisk gnidningskraft G, og svarende til at den øverste del tendentielt falder bagover i forhold til den nederste del, en trykkraft eller normalreaktion N, i det venstre kontaktpunkt og en trækkraft T i det højre kontaktpunkt.

Hvis $b = h/L$ (jf. figuren) betegner brøkdelen af skorstenen under snittet i forhold til hele skorstenen, har stykket over snittet længden $(1-b)L$, massen $(1-b)m$, inertimomentet om sit tyngdepunkt $\frac{1}{12}(1-b)m(1-b)^2L^2$ (hvis vi ser bort fra skorstenens bredde), og en radius for tyngdepunktets cirkelbevægelse på $(1+b)L/2$. Med betegnelser og orienteringer i figur 3 får vi da:

$$(T+N)r - G(1-b)\frac{L}{2} = \frac{1}{12}(1-b)^3 mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

$$G + (1-b)mg\sin\theta = (1-b)m(1+b)\frac{L}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4)$$

$$T - N + (1-b)mg\cos\theta = (1-b)m(1+b)\frac{L}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (5)$$

Ved indsættelse af $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ fra ligning (2) i ligning (4) fås:

$$G = \frac{1}{4}(1-b)mg\sin\theta(3b-1), \quad (6)$$

som indsat sammen med $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ fra ligning (2) i ligning (3) giver:

$$T + N = \frac{1}{4}(1-b)mg\sin\theta(1-b)b\frac{L}{r} \quad (7)$$

Endelig giver indsættelse af $(d\theta/dt)^2$ fra ligning (1) i ligning (5):

$$T - N = \frac{1}{2}(1-b)mg(3(1+b) - (5+3b)\cos\theta) \quad (8)$$

Ligningerne (6) og (8) viser, at under faldet er både den samlede statiske gnidningskraft G og differencen $T-N$ mellem træk- og trykkraften i hver side af skorstenen af størrelsesordenen mg. Herimod er summen $T+N$ ifølge ligning (7) af størrelsesordenen mgL/r, hvor r er skorstenens radius eller halve bredde. Da L for skorstene er op til flere størrelsesordener større end r, er både den tangentielle statiske gnidningskraft G og differencen imellem de to normalkræfter T og N derfor ubetydelig i forhold til deres sum. Heraf kan to ting konkluderes. For det første betyder det, at det mere er skorstensmørtelens evne til at fæstne en overliggende og en underliggende mursten til hinanden i lodret retning, end det er mørtelens evne til at hindre murstenene i at skride sidelæns i forhold til hinanden, der er afgørende for skorstensknæk. For det andet betyder det, at vi kan springe løsning af ligningerne (7) og (8) med de to ubekendte T og N over, da de tilnærmelsesvis er lige store.

Skorstenen knækker der, hvor kravene til sammenklistringskraften T først overskrider, hvad mørtelen kan levere. Da højresiden af ligning (7) differentieret med hensyn til b er 0 for $b = 1/3$, ses svaret på opgaven at være, at en væltende skorsten, hvis den knækker i faldet, gør det i en tredjedels højde.

Mørtelens evne til at forhindre skridning imellem murstenslagene i skorstenen er som sagt ikke det størrelsesordensmæssigt afgørende i forhold til dens evne til at klistre lagene sammen, så de ikke vippes fra hinanden. Ifølge ligning (6) er der slet ikke nogen statisk gnidningskraft under faldet det sted i skorstenen, hvor knækket potentielt finder sted.

Kommentar

Litteraturen om skorstensknæk går mange år tilbage. I det mindste til 1905 (Routh, E.J.: Dynamics of a System of Rigid Bodies, Part 1, Dover, New York (1960), pp 124-125. Bogen er et genoptryk fra 1905.). Her og senere (f.eks. Reynolds, J. B.: Falling Chimney, *Am. J. Phys.*, **14**, p. 275 (1946) og Madsen, E. L.: Theory of the chimney breaking while falling, *Am. J. Phys.*, **45**, pp 182-184 (1977)) regnes skorstenen for at knække i det punkt, hvor kraftmomentudvekslingen imellem den øvre del og den nedre del er størst. Det svarer til at vi i ligning (7) finder maksimum for $(T+N)\cdot r$ som funktion af b. Og så er svaret, at den knækker i en tredjedels højde, alment gældende. Svaret afhænger ikke af opgavebesvarelsens indførte model med kun to kontaktpunkter mellem lagene i skorstenen. Det ses også, at vinkelafhængigheden i ligning (7) alment udgør en faktor for sig, således at knækstedet ikke afhænger af, hvornår i faldet skorstenen knækker. Men svaret en tredjedels højde afhænger af antagelsen om, at skorstenen har ens tværsnit hele vejen op. Med en anden skorstensform vil ligningerne i opgaveløsningen skulle justeres. I den justerede ligning (7) vil vinkelafhængigheden stadig være givet ved $\sin\theta$, men ganget med et andet polynomium i b. Knækpunktet vil være uafhængigt af, hvornår skorstenen knækker, men et andet end for skorstene med ens tværsnit fra top til bund.

Men måske er opgaveløsningens idealiserede model med maksimalt krav til T som knækpunktskriterium mere realistisk end idéen om, at skorstenen knækker, hvor kraftmomentudvekslingen imellem lagene er størst, uafhængigt af hvordan kræfterne imellem de to lag er fordelt. Som sagt i opgavebesvarelsen har ikke blot det samlede kraftmoment lagene imellem men også T maksimum for $b = 1/3$, forudsat at skorstenens bredde er forsvindende i forhold til dens højde. Hvis dette ikke er tilfældet skal T udledes ved kombination af ligningerne (7) og (8). Og så ses knækpunktet udover at fjerne sig fra $b = 1/3$ også at komme til at afhænge af, ved hvilken værdi af θ skorstenen knækker. I artiklerne (Bundy, F.P.: Stresses in Freely Falling Chimneys and Columns, *J. Appl. Phys.*, **11**, p 112 (1940) og Varieschi, G. and Kamiya, K.: Toy models for the falling chimney, *Am. J. Phys.*, **71**, pp. 1025-1031 (2003)) er der udført en del regninger desangående. Blandt andet har Bundy regnet på skorstenen på figur 1. Ved at tage højde for dens ikke forsvindende bredde og dens koniske form forklarer han, hvorfor skorstenen, som det ses på billedet, ved den forholdsvise lille vinkel, hvor knækket finder sted, nærmere knækker på midten end i en tredjedels højde. Forfatterne af den anden artikel har sammen med Jully, I.R. oprettet "The Falling Chimney Web Page"; http://myweb.lmu.edu/gvariescgi/chimney/chimney.html.

Så langt for regning på skorstensknækproblemet. Jeg har selv en del år spekuleret på dets løsning og egnethed som breddeopgave, fordi jeg erindrer at have set fænomenet både på gaden og på film. Men jeg har ikke på egen hånd kunnet finde ud af at takle problemet. Den præsenterede løsning af opgaven er i det væsentlige kopieret efter (David Morin: Introduction to Classical Mechanics, Cambridge University Press, pp 363-364, (2008)), hvor jeg tilfældigt første gang så den behandlet.

Opgaven har ikke været stillet som eksamensopgave ved Breddekurset på RUC. Den er for svær. Og det er ikke meningen med breddeopgaver, at lærerne herigennem skal kunne udfordre deres studerende med problemer, lærerne finder interessante uden selv at have hold på dem. Tværtimod skal de studerende under usikkerheden ved de ofte åbent og upræcist formulerede spørgsmål i breddeopgaverne kunne føle sig trygge ved, at i alle tilfælde læreren som opgavestiller har følt sig i stand til at fokusere spørgsmålene på en måde, der gør opgaverne løsbare.

Den skorstensknækopgave, der har været stillet (ved sommereksamen 2003 og uden figur 1) har denne ordlyd:

Når en høj skorsten bygget af mursten vælter, vil den i faldet ofte knække i to stykker (eller flere). Vil den øverste del falde forover eller bagover i forhold til den underste del. Begrund svaret.

Løsningen i artiklen her på problemet om, hvor skorstensknækket finder sted, startede med besvarelsen af denne mere overkommelige opgave.

I stedet for at være anvendelig som breddeopgave, er udfordringen at finde ud af, hvor skorstene knækker under fald, velegnet som udgangspunkt for et længerevarende projektarbejde, hvor det godt kan være en pointe, at læreren udfordres af projektets problem sammen med de studerende.

Breddeopgave 45 og 46. Afkølingstid

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra henholdsvis vintereksamen 2010 og vintereksamen 2005, nr. 45 og 46 i rækken her i KVANT):

Hvad er størrelsesordenen af tiden, det vil tage for varmen at fordele sig i en jernklump af Jordens størrelse med et opvarmet indre? I E. S. Johansens ældre lærebog i varmelære er der følgende data for jern: massefylde ved 18 °C: 7,86 g cm^{-3}, lineær udvidelseskoefficient mellem 0 °C og 100 °C: 0,0000125 grad^{-1}, varmefylde ved 18 °C: 0,111 cal g^{-1}grad^{-1} og varmeledningsevne ved 18 °C: 0,20 cal grad^{-1} cm^{-1} s^{-1}. Begrund svaret.

Når man sætter hånden på et stykke koldt metal mærkes en kraftig varmestrøm fra hånden ud i metallet. Hvordan ændrer varmestrømtætheden sig med tiden (til korte tider)? Begrund svaret ved en dimensionsanalyse.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.