Kasserollehåndtag – breddeopgave 24 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 24 i rækken i KVANT):

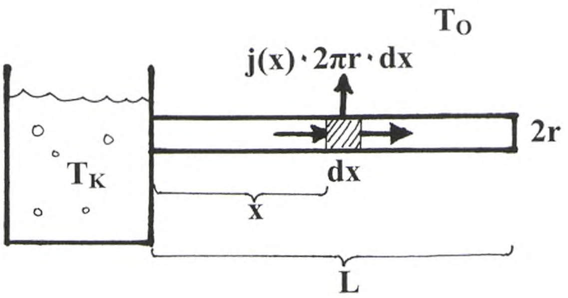
24. Kasserollehåndtag

Oftest brænder man sig på pander eller kasseroller med metalhåndtag, når man fjerner dem fra ilden. Hvordan afhænger temperaturen af enden af et sådant metalhåndtag af dets længde og tykkelse? Begrund svarene.

Løsning

Vi vil se på den stationære situation, hvor metalhåndtaget efter at være blevet varmet op har indstillet sig med en temperaturfordeling, der ikke mere ændrer sig med tiden. Temperaturfordelingen er da styret af varmeledningen i håndtaget og energiafgivelsen til den omgivende luft omkring håndtaget.

Vi kalder temperaturen i kasserollen (typisk vands kogepunkt) for T_K, temperaturen af den omgivende luft for T_O (typisk stuetemperatur) og temperaturen af metalhåndtaget i afstanden x fra kasserollen for $T(x)$. Håndtagets længde kaldes L og dets tværsnitsradius r.



Figur 1. Energistrøm gennem et kasserollehåndtag.

Da energistrømmen ind og summen af de to energistrømme ud af det skraverede område på figur 1 skal være lige store i den stationære situation, har vi:

$$-\kappa \cdot \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_x \cdot A$$
$$= \; -\kappa \cdot \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x+dx} \cdot A + j(x) \cdot 2\pi r \cdot dx, \quad (1)$$

hvor κ er varmeledningsevnen for metallet, A metalhåndtagets tværsnitsareal og $j(x)$ er energiafgivelsen til den omgivende luft per tidsenhed per arealenhed fra det skraverede område. A er proportional med r, hvis håndtaget er konstrueret hult af en metalplade af given tykkelse, og proportional med r^2, hvis håndtaget er massivt.

Energiafgivelsen til omgivelserne sker både ved varmeledning, konvektion og varmestråling. Så længe håndtagets absolutte temperatur ikke er forholdsmæssigt meget større end den absolutte stuetemperatur, kan $j(x)$ som den simpleste antagelse regnes for proportional med $T(x)-T_O$. Dvs. $j(x) = K\cdot(T(x)-T_O)$, hvor K er en karakteristisk konstant for energistrømmen per arealenhed fra en varm overflade til luft. Med dette tilnærmede udtryk for $j(x)$ kan ligning (1) omformes til:

$$\frac{d^2(T(x)-T_O)}{dx^2} = 1/\lambda^2 \cdot (T(x) - T_O) \qquad (2)$$

med

$$\lambda = \sqrt{(\kappa/K)\cdot A/2\pi r} \qquad (3)$$

Af ligning (2) ses det, at λ er den afgørende parameter for udseendet af $T(x) - T_O$ som funktion af x. Og dermed også den afgørende parameter for temperaturen for $x = L$, dvs. for om man brænder sig ved at tage på enden af kasserollehåndtaget. Af ligning (2) ses også, at λ har dimension af en længde. Vi kan derfor roligt gribe om enden af kasserollehåndtaget, hvis L er en størrelsesorden større end den karakteristiske længde givet ved ligning (3). Hvorimod vi må påregne at brænde os, hvis L er mindre end eller af samme størrelsesorden som λ. Hvis håndtaget er hult, således at A er proportional med r, ses det, at tykkelsen af håndtaget er ligegyldig. Hvis håndtaget derimod er massivt, således at A er proportional med r^2, ses det, at f.eks. et dobbelt så tykt håndtag nødvendiggør, at længden gøres $\sqrt{2}$ gange større for at fastholde temperaturen af enden af håndtaget.

Opgaven kan også løses mere udførligt ved at løse ligning (2) med randbetingelserne $T(x)-T_O = T_K-T_O$ for $x = 0$ og $d(T(x)-T_O)/dx = 0$ for $x = L$. Hvor der er set bort fra energiafgivelsen fra håndtagets endeflade som betydningsløs. Løsningen til ligning (2) er da:

$$\begin{aligned} & T(x) - T_O \\ = \;& (T_K - T_O) \cdot \left[\frac{e^{x/\lambda}}{1 + e^{2L/\lambda}} + \frac{e^{-x/\lambda}}{1 + e^{-2L/\lambda}} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Ved heri at sætte $x = L$ fås:

$$T(L) - T_O = \frac{2 \cdot (T_K - T_O)}{e^{L/\lambda} + e^{-L\lambda}} \quad (5)$$

som den mere præcise sammenhæng imellem temperaturen af enden af håndtaget og dets længde. Og via λ også sammenhængen imellem temperaturen af enden af håndtaget og dets tykkelse.

Kommentarer

1. Opgaven hører til i den matematiktunge ende af eksamensopgaverne fra breddekurset på RUC. De fleste af breddeopgaverne er udarbejdet, så de kan løses ved forholdsvis simple regninger. Fordi vi ikke ønsker, at matematiktekniske vanskeligheder kommer til at skygge for det centrale i breddekurset, nemlig træningen i at kunne bringe et problem på en form, så det kan gøres til genstand for matematisk/fysisk bearbejdning. I modsætning til de mere traditionelle dybdekurser i termodynamik, elektrodynamik og kvantemekanik på fysikstudiet på RUC, hvor der formidles på den sædvanlige matematikbårne vis. Alligevel stilles der undertiden altså også opgaver til breddeeksaminerne, der som denne er matematiktunge på niveau med de typiske eksamensopgaver på dybdekurserne. Én af retfærdiggørelserne herfor er, at det hører med til det at kunne fysificere og matematificere at være i stand til at vælge matematikteknisk niveau efter omstændighederne. I det lys er det en fordel, at matematikfordringerne til besvarelserne af breddeopgaverne er så varierede, som tilfældet er.

2. Hvornår er en breddeopgave løst tilfredsstillende? Er ræsonnementerne ovenfor med udgangspunkt i ligningerne (2) og (3) f.eks. en tilfredsstillende besvarelse af opgaven her? Eller er den tilfredsstillende besvarelse ligningerne (3) og (5)? Sådan spørger de studerende på breddekurset naturligvis. Hvor mit svar på spørgsmålet vil være, at begge former for besvarelser kan være mere eller mindre tilfredsstillende afhængig af, hvordan de begrundes. Og at det suveræne svar gør rede for begge måder at svare på.

3. Den matematiske udledning af (4) fra (2) kan være svær. Opstillingen af ligning (1) via figur 1 kan også være en vanskelig proces. Mere overraskende er det måske, at sådan noget som udledningen af ligning (2)+(3) fra ligning (1) for de studerende i begyndelsen af breddekursusforløbet også erfaringsmæssigt indebærer vanskeligheder udover modelleringen af $j(x)$. På det tidspunkt opfatter de studerende for det meste differentiation udelukkende som en operator, der afbilder en funktion ind i en anden funktion. Altså den opfattelse af differentiation, som udledningen af (4) fra (2) kræver. Hvorimod udledningen af (2)+(3) fra (1) jo kræver, at differentiation tænkes som en kvotient af infinitesimale differencer. Og for de studerende virker det i første omgang forvirrende at skulle veksle imellem to repræsentationer af det samme begreb. Som det er almindeligt i fysik. I mindre grad i matematik. Men helt afgørende ved matematisk modellering.

Breddeopgave 25. Stefans konstant

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1987, nr. 25 i rækken her i KVANT):

Stefan-Boltzmanns lov, at energitætheden i hulrumsstråling er lig med en universel konstant gange den absolutte temperatur i fjerde potens, kan udledes ud fra elektrodynamikken og termodynamikken. Størrelsen af den universelle konstant lader sig imidlertid kun forklare ud fra mere grundlæggende naturkonstanter inden for rammerne af kvantemekanikken, hvilket antyder en sammenhæng mellem kvantemekanik og termodynamik. Hvordan er sammenhængen mellem konstanten i Stefan-Boltzmanns lov og mere grundlæggende naturkonstanter? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.