

# Magnetfelter er spændingstilstande i rummet

Vagn O. Jensen

Lige siden H.C. Ørsted i 1820 opdagede sammenhængen mellem magnetisme og elektriske strømme, har man diskuteret, hvordan magnetfelter bedst kan opfattes. Kilderne, der genererer et magnetfelt,  $\mathbf{B}$ , er strømme i elektriske ledere (i et magnetiserbart materiale, som f.eks. en permanent magnet, dannes strømmene ved en ensretning af strømsløjferne i de enkelte atomer). Et  $\mathbf{B}$ -felt tilskrives en styrke, som kan måles på forskellige måder, f.eks. benyttedes i tidligere tider frekvensen af en kompasnåls svingning i et magnetfelt som et mål for feltstyrken. Mere nøjagtige målinger opnås nu ved at bestemme kraftpåvirkning på en strømførende leder i feltet eller afbøjningen af en ladet partikel, der bevæger sig i feltet. De nævnte metoder er alle baseret på en kraftpåvirkning på målesonderne, og reaktionen på disse kræfter virker tilbage på strømlederne, der genererer magnetfeltet. Et magnetfelt kan altså opfattes som et medium, som transmitterer kræfter mellem strømførende legemer. Sådanne legemer kan frastøde hinanden, tiltrække hinanden og endog dreje hinanden. Det er disse egenskaber, der udnyttes i elektromagnetiske apparater, som motorer, generatorer, drejespoleinstrumenter o.m.a.

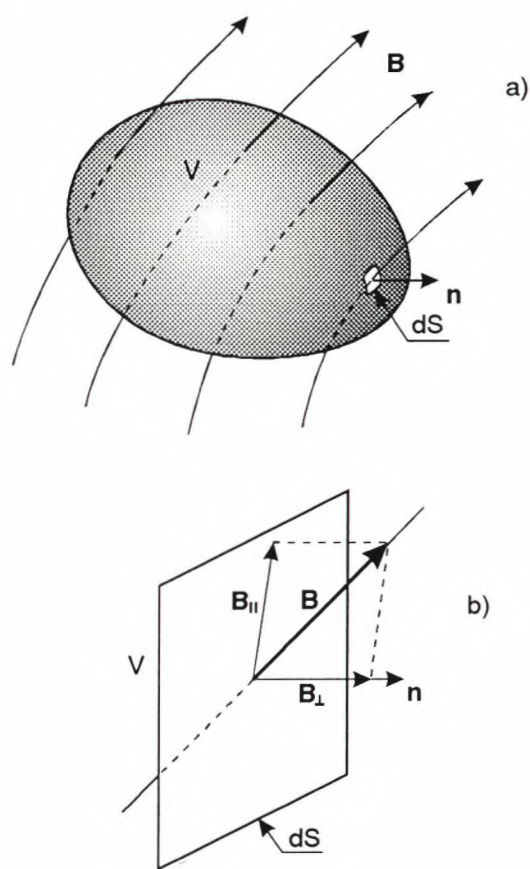
Et magnetfelt kan også opfattes som bærer af en rumlig energitæthed. Til strømledere, der genererer magnetfelter, er der altid knyttet en selvinduktion  $L$ , og det koster en energimængde  $\frac{1}{2} LI^2$  at etablere en strøm  $I$  i disse ledere. Denne energimængde kan opfattes som fordelt i magnetfeltet omkring lederen med en energitæthed  $B^2(\mathbf{r})/2\mu_0$ .

I denne artikel ser vi på tidsuafhængige magnetfelter og viser, at de kan fortolkes som simple spændingstilstande i rummet, der overfører kræfter mellem forskellige områder. De magnetiske kræfter, der påvirker et vilkårligt valgt volumen i et magnetfelt, kan opfattes som spændinger, der alene påvirker volumenets overflade. Situationen er analog til bjælker og andre bygningselementer, som transmitterer kræfter, ved at der opstår træk-, tryk- og forskydningspændinger i dem, eller til en almindelig gas, som via det isotrope tryk transmitterer trykkræfter fra den ene væg til den anden. Med denne fortolkning af et magnetfelt får vi et grundlag for en simpel fysisk forståelse af magnetfeltets egenskaber, som kan lette vor opfattelse af magnetiske kræfters virkemåde.

Vi udleder og diskuterer først de magnetiske spændinger for vakuumsfelter, dvs. felter i områder, hvor der ikke kan flyde elektriske strømme. Som eksempler på brugen af disse spændinger udleder vi derefter nogle allerede kendte egenskaber ved vakuumsfelter og viser, at spændingerne kan forklare tiltrækningen og frastødningen mellem elektriske ledere og mellem permanente magneter. Magnetiske spændinger er af særlig interesse inden for plasmafysikken. Det skyldes, at mange plasmaegenskaber kan forklares ved brug af de magnetiske spændinger

i kombination med plasmaets partikeltryk. En udledning af dette præsenteres, og resultaterne bruges derefter til at forklare nogle simple problemer inden for plasmafysik og fusionsforskning.

I hovedteksten gives en bred og ret elementær diskussion af stoffet illustreret med figurer, men med kun få og simple formler. Det er tilstræbt, at hovedteksten skal kunne læses alene og give et godt indtryk af magnetiske spændinger og deres brug. Læsere med interesse for at gå mere i dybden og følge de matematiske udledninger kan finde disse i boksen. En mere omfattende analyse af magnetiske spændinger og deres brug kan findes i [1].



Spændingsart	Størrelse	Retning
Forskydning	$B_{\parallel} B_{\perp} / \mu_0$	$(\mathbf{B}_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel}) \times \mathbf{n}$
Træk	$B_{\perp}^2 / \mu_0$	$\mathbf{n}$
Tryk	$B^2 / 2\mu_0$	$-\mathbf{n}$
(Partikeltryk)	$p$	$-\mathbf{n}$

Figur 1. Magnetiske spændinger.

## Magnetiske spændinger i vakuumsfelter

Maxwell-ligningerne er grundligningerne for en behand-

ling af alle elektromagnetiske fænomener, også af vore magnetiske spændinger. For stationære  $\mathbf{B}$ -felter, som vi betragter, tager ligningerne formen (A.1) og (A.2) i boksen. Analysen under A) fører til resultatet i (A.9). Den fysiske fortolkning af denne ligning er følgende: Betragt et område i et magnetfelt, hvor der ikke løber elektriske strømme, som skitseret på fig. 1a). Magnetfeltet er altså genereret af strømme uden for det betragtede område. Ind i dette område lægges et volumen,  $V$ , med vilkårlig valgt form.  $V$ 's overflade kaldes  $S$ , og  $dS$  er et infinitesimalt element af denne.  $\mathbf{n}$  er en udadrettet enhedsvektor, som står vinkelret på  $dS$ -fladen;  $\mathbf{n}$  ændrer altså retning, når

vi bevæger os rundt på  $S$ . Den overordnede fortolkning af (A.9) er, at  $V$  påvirkes af spændinger, der transmitterer kræfter gennem overfladen, og at den samlede resulterende kraft på  $V$  er nul. En mere detaljeret fortolkning af (A.9) giver størrelse og retning af de magnetiske spændinger, der transmitteres gennem  $S$ .

På fig. 1b) vises  $dS$  fra 1a) i forstørret målestok.  $\mathbf{B}$ -feltet i  $dS$  har normalkomponenten  $\mathbf{B}_\perp$  (parallel med  $\mathbf{n}$ ) og komponenten  $\mathbf{B}_\parallel$  parallel med  $dS$ -fladen. Integranden i første led på højre side af (A.9) viser, at  $\mathbf{B}$ -feltet påvirker  $dS$  med en trækspænding langs magnetfeltlinien og altid i retningen ud fra  $V$ .

## Boks

### Udledning af magnetiske spændinger

De tidsuafhængige Maxwell-ligninger for et  $\mathbf{B}$ -felt er

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{A.1})$$

og

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Krydsproduktet af (A.1) med  $\mathbf{B}$  giver

$$\mathbf{f} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.3})$$

Da  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  er Lorentzkraften på en volumenehed med strømtætheden  $\mathbf{j}$ , har (A.3) dimensionen krafttæthed ( $\text{N/m}^3$ ), og må derfor opfattes på den måde, at når man vælger et volumenelement,  $dV$ , så er  $\mathbf{f}dV$  den magnetiske kraft, der påvirker  $dV$ . I det følgende udleder vi først under A) de magnetiske spændinger for vakuumområder og derefter under B) for plasmaer.

#### A) Magnetiske spændinger i strømfri vakuumområder

For strømfri områder, hvor  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ , bliver (A.3)

$$\mathbf{f}_{vak} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.4})$$

som viser, at den magnetiske kraft  $\mathbf{f}_{vak}dV$ , på et volumenelement i et strømfrit område er lig 0. Dette er naturligt, da vi jo ser på stationære situationer.

Den fra vektoranalysen kendte identitet

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \equiv -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) - \nabla \frac{B^2}{2} \quad (\text{A.5})$$

fører med (A.2) til at (A.4) kan skrives

$$\mathbf{f}_{vak} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Den samlede magnetiske kraft,  $\mathbf{F}_{vak}$ , på et endeligt volumen,  $V$ , der er placeret i feltet, fås ved at integrere (A.6) over  $V$ . De to led, der skal integreres, er henholdsvis divergensen af tensorfunktionen  $\mathbf{B}\mathbf{B}/\mu_0$  og gradienten af skalarfunktionen  $B^2/2\mu_0$ . Bemærk at begge disse funktioner har dimensionen energitæthed ( $\text{J/m}^3$ ), hvilket er det samme som dimensionen for tryk og spændinger ( $\text{N/m}^2$ ). For begge de to led i (A.6) gælder det specielle, at deres integraler over et volumen,  $V$ , kan erstattes af integrationer over  $V$ 's overflade. Dette udtrykkes matematisk ved Green's formel for skalarfunktionen  $\phi(\mathbf{r})$

$$\int_V \nabla \phi dV \equiv \int_S \phi \mathbf{n} dS \quad (\text{A.7})$$

og den tilsvarende for tensorfunktionen  $T(\mathbf{r})$

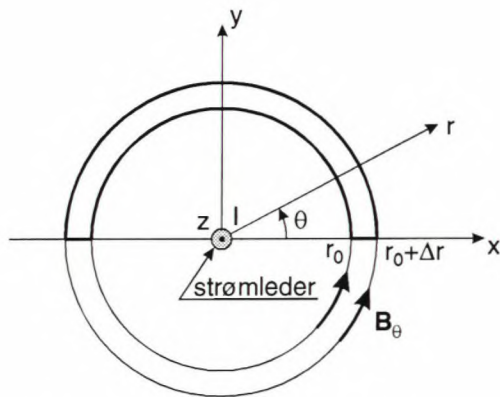
$$\int_V \nabla \cdot T dV \equiv \int_S \mathbf{n} dS \cdot T, \quad (\text{A.8})$$

hvor  $dV$  er et infinitesimalt element af  $V$ ,  $S$  er  $V$ 's samlede overflade, og  $\mathbf{n}$  er en udadrettet enhedsvektor i  $dS$ . Vi finder

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{vak} &= \int_V \mathbf{f}_{vak} dV \\ &= \int_S \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{\mu_0} dS - \int_S \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{n} dS \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En geometrisk fortolkning af integranderne i (A.9) i form af træk-, tryk- og forskydningspændinger er vist på fig. 1 og diskuteret i hovedteksten. Det skal dog her bemærkes, at det er selve feltets værdi, der indgår i integralerne i (A.9) og ikke de afledede af feltet, som optræder i grundligningerne (A.1) og (A.2).

Den opdeles i en forskydningsspænding af størrelsen  $B_{\parallel}B_{\perp}/\mu_0$ , som peger i retningen af trækspændingens projektion på  $dS$  og i en trækspænding  $B_{\perp}^2/\mu_0$ , som peger vinkelret ud fra  $dS$  i  $\mathbf{n}$ 's positive retning. Bemærk at begge de nævnte spændinger forbliver uændret ved en  $180^\circ$  vending af magnetfeltets retning. Integranten i sidste led i (A.9) viser, at  $\mathbf{B}$ -feltet også påvirker  $dS$  med en indadrettet trykspænding,  $B^2/2\mu_0$ . Denne trykspænding, der altid virker vinkelret på  $dS$ , svarer helt til trykket i en isotrop gas, der jo også virker vinkelret paa væggen. Kræfterne, der transmitteres gennem  $dS$  til  $V$ , er så de nævnte spændinger ganget med  $dS$ . Nederst på fig. 1 er de forskellige spændinger angivet både med størrelse og retning.

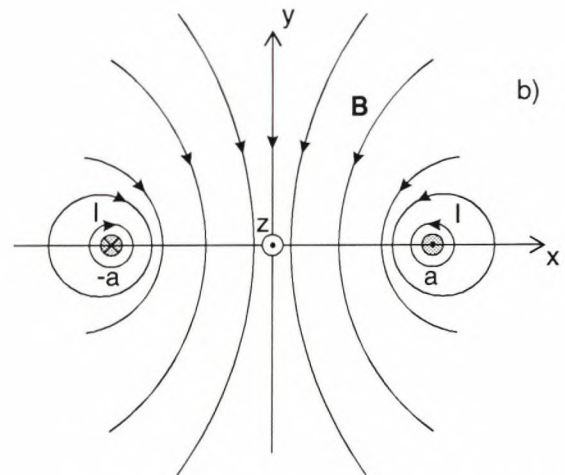
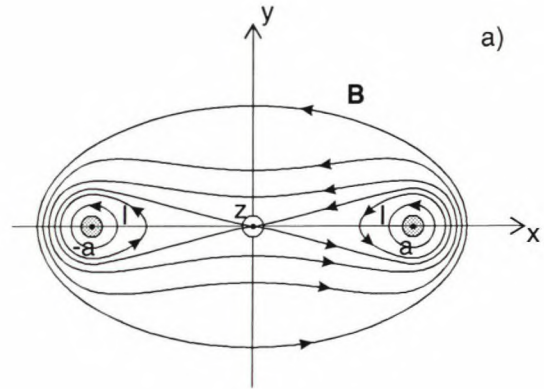


Figur 2. Summen af magnetiske kræfter på feltlinierør i vakuumfeltet omkring ret leder er nul.

Ved brug af de magnetiske spændinger til aktuelle beregninger er man ofte fri i sit valg af formen af det volumen,  $V$ , man betragter. Det fremgår af fig. 1, at hvis man vælger  $V$  med form som et feltlinierør med endeflader, der står vinkelret på feltlinierne, så bliver beregningerne simple. På et sådant rørs sideflader er  $\mathbf{B}_{\perp} = 0$ , og de på virkes derfor kun med det isotrope tryk  $B^2/2\mu_0$  vinkelret indad mod  $dS$ -fladen. På endefladerne er  $\mathbf{B}_{\parallel} = 0$ , og de på virkes derfor med en udadrettet trækspænding  $B^2/\mu_0$  og med en indadrettet trykspænding  $B^2/2\mu_0$ . Disse to spændinger resulterer i en udadrettet trækspænding med styrken  $B^2/2\mu_0$ . Et magnetfelt kan altså opfattes som et medium, hvori der hersker en trækspænding,  $B^2/2\mu_0$ , langs feltlinierne og en trykspænding, også  $B^2/2\mu_0$ , vinkelret paa feltlinierne.

Som eksempel på brugen af magnetiske spændinger er det let at vise, at feltet omkring en lang, retlinet leder med strømmen  $I$  opfylder betingelsen om, at den resulterende kraft på et volumen i feltet er nul. På fig. 2 er lederen sammenfaldende med  $z$ -aksen. Magnetfeltet består af koncentriske cirkler med centrum i  $z$ -aksen. Feltstyrken er  $B_{\theta}(r) = \mu_0 I/2\pi r$ . Som volumen vælger vi et feltlinierør som vist kraftigt optrukket på figuren. Det er en halv cylinderskal med indre radius  $r_0$  og ydre radius  $r_0 + \Delta r$ . Det har længden  $L$  i  $z$ -retningen, og

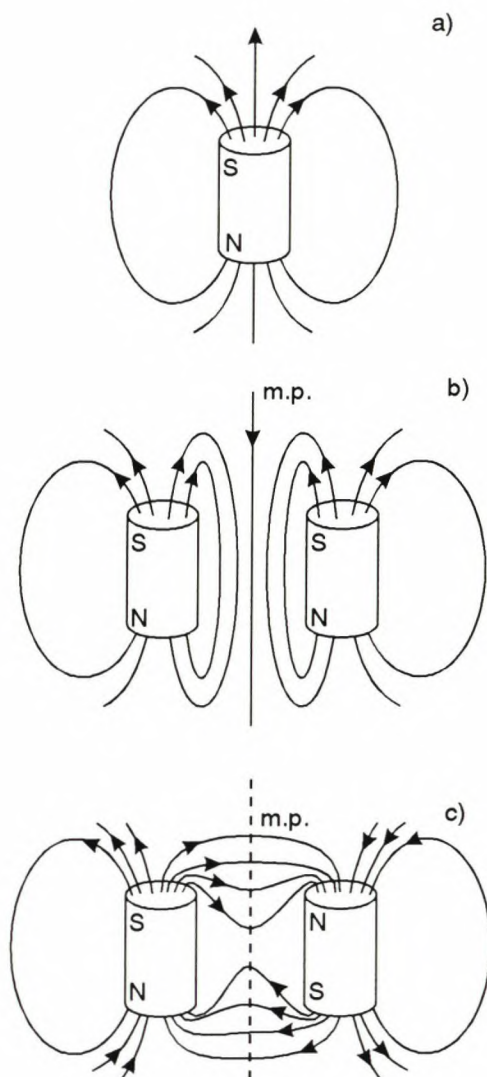
det strækker sig fra  $\Theta = 0$  til  $\Theta = \pi$ , dvs. dets endeflader ligger i  $xz$ -planen. Vi ser på  $y$ -komponenterne af de magnetiske kræfter, der påvirker cylinderskallen. På indersiden af skallen er feltstyrken  $B_{\theta}(r_0)$ , og det tilsvarende isotrope magnetfelttryk påvirker skallen i den positive  $y$ -retning med kraften  $2r_0 L B_{\theta}^2(r_0)/2\mu_0$ . På ydersiden er feltstyrken  $B_{\theta}(r_0 + \Delta r)$ , og det påvirker tilsvarende skallen i den negative  $y$ -retning med kraften  $2(r_0 + \Delta r)L B_{\theta}^2(r_0 + \Delta r)/2\mu_0$ . Endelig påvirkes endefladerne med trækspændingen  $B_{\theta}^2(r)/2\mu_0$  også i den negative  $y$ -retning. Det er nu let at vise, at netop med  $B_{\theta}$ -feltets  $r^{-1}$ -afhængighed er summen af de tre magnetiske spændingskræfter lig nul.



Figur 3. Magnetiske kræfter mellem rette, parallelle ledere med a) parallelle strømme og b) antiparallele strømme.

I det foregående har vi kun set på strømfri volumener og vist, at de magnetiske spændinger ikke yder nogen resulterende kraft på sådanne volumener. Vi vil nu også se på volumener, hvori der løber strømme; det kan være lukkede strømsløjfer inden for det betragtede volumen eller strømme, der løber gennem disse volumener. Som før repræsenterer de magnetiske spændinger på et sådant volumens overflade den kraft, der transmitteres

gennem en arealenhed af overfladen ind i volumen. Integralet over hele overfladen af disse spændinger er derfor den resulterende kraft på volumenet, og den overføres til strømlederne via feltet mellem lederne og overfladen. Hvis lederne ikke holdes mekanisk fast, vil de bevæge sig. Denne effekt bruges f.eks. i elektromotorer og i elektriske drejespoleinstrumenter.



Figur 4. Magnetiske kræfter mellem permanente stangmagneter b) parallelle, c) antiparallele.

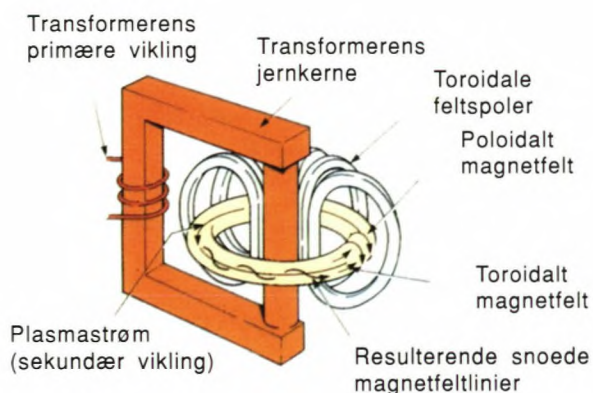
Lad os som eksempel beregne kraften pr. længdeenhed mellem to retlinede strømførende ledere som vist på fig. 3. Lederne er parallelle med z-aksen, og de skærer xy-planen i  $(a,0)$  og  $(-a,0)$ . Afstanden mellem dem er altså  $d = 2a$ . Hvis strømmen i begge ledere løber i z-retningen, ser feltet ud som skitseret på fig. 3a). Da feltlinierne overalt står vinkelret på yz-planen, transmitteres der kun trækkræfter gennem denne plan, dvs. de to ledere tiltrækker hinanden. Hvis strømmene i de to ledere er antiparallele, ser feltet ud som skitseret på fig. 3b). I yz-planen er feltet nu overalt parallelt med denne plan, og der transmitteres derfor kun trykspændinger gennem planen. De to ledere vil derfor

frastøde hinanden. I begge tilfælde er kraftens numeriske værdi

$$K = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}. \quad (1)$$

Interesserede læsere inviteres til at verificere dette resultat ved brug af de fundne udtryk for magnetiske træk- og trykspændinger. Det er værd at minde om, at (1) bruges som definition af enheden ampere for strømstyrke, idet: "En ampere er defineret som strømstyrken af en konstant elektrisk strøm, der - når den løber i to parallelle, uendeligt lange ledere med forsvindende lille cirkulært tværsnit, som har en indbyrdes afstand på 1 meter og er anbragt i det tomme rum - bevirker at den ene leder påvirker den anden med kraften  $2 \cdot 10^{-7}$  newton for hver meter". (Husk at  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m).

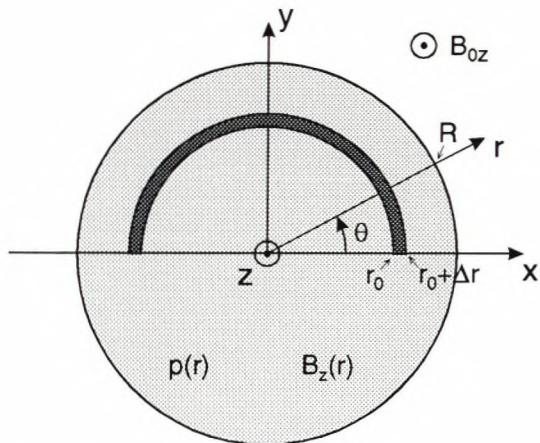
Vekselvirkningen mellem permanente magneter kan også let forstås ud fra magnetiske spændinger. Feltet omkring en aksialt magnetiseret stangmagnet forløber som antydnet på fig. 4a). Placeres sådanne to magneter parallelt ved siden af hinanden, forløber feltet som i fig. 4b). I midtplanen, *m.p.*, er feltlinierne parallelle med denne plan. Magnetfeltet overfører derfor et isotropt tryk gennem denne plan; det overføres til magneterne, som derfor frastøder hinanden. Placeres magneterne derimod antiparallelt ved siden af hinanden som i fig. 4c), får feltliniebilledet det viste udseende. Alle feltlinierne står nu vinkelret på midtplanen, og der transmitteres derfor en trækspænding gennem denne plan; den overføres til magneterne, som derfor tiltrækker hinanden.



Figur 5. Tokamakprincippet. Plasmaet ligger som en lukket ring i toruskammeret, som ikke er vist. En række toroidale feltspoler genererer et toroidalt magnetfelt, hvis feltlinier løber "den lange vej" rundt langs plasmaringen. Plasmaringen udgør sekundærviklingen på en transformer, som genererer en plasmastrom rundt i ringen. Plasmastrommen genererer et toroidalt magnetfelt, hvis feltlinier løber "den korte vej" rundt om plasmaringen. Kombinationen af de to magnetfelter er et resulterende felt, hvis feltlinier snor sig rundt om plasmaringen. Dette felt er grundlaget for tokamakens gode plasmaindslutningsegenskaber.

### Magnetiske spændinger og partikeltryk i plasmaer

I det foregående har vi betragtet magnetiske spændinger i vakuumområder og vist, at de kan benyttes til at udlede

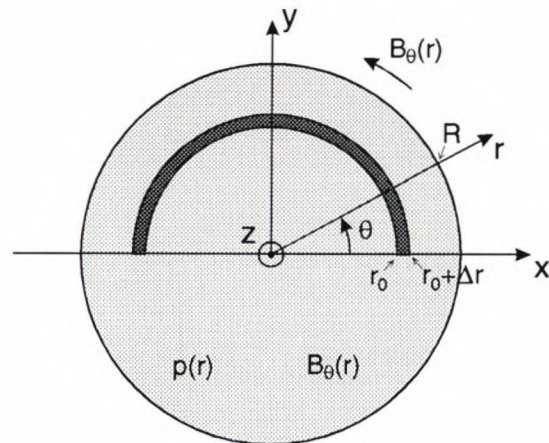


Figur 6. Trykbalance i  $\Theta$ -pinchen.

udtryk for felter og kraftpåvirkninger mellem ledere. Magnetiske spændinger bliver imidlertid først virkelig brugbare inden for fusionsplasmafysikken, hvor det viser sig, at de kan simplificere mange beregninger og lette den fysiske forståelse af fænomenerne. I dette afsnit ser vi på spændinger i magnetiserede plasmaer. Hovedformålet er ved hjælp af disse spændinger at give en simpel fysisk forklaring på, hvordan et plasma kan holdes indesluttet i en tokamak. Tokamakken er den magnetfeltkonfiguration som hidtil har vist sig bedst egnet til at holde et fusionsplasma indesluttet, og det bliver sandsynligvis den konfiguration, der vil blive benyttet i de første fusionskraftværker. Tokamakens princip er vist skematisk på fig. 5. Før vi behandler selve tokamakkonfigurationen, viser vi nogle eksempler, der er nyttige for forståelsen.

En beregning af spændingstilstandene i et magnetiseret plasma er gennemført under B) i boksen. Maxwell-ligningerne (A.1) og (A.2) er igen grundligningerne, men i modsætning til vakuumtilfældet under A) kan der i et plasma løbe elektriske strømme. Relationen mellem strømmen, magnetfeltet og plasmatrikket,  $p(r)$ , er givet ved (A.10). Analysen under B) i boksen fører til resultatet (A.13). Den fysiske fortolkning af denne ligning er meget lig fortolkningen af det tilsvarende udtryk (A.9) for vakuumtilfældet. Hvis vi igen ser på fig. 1 er den eneste forskel, at  $dS$  ud over de samme magnetiske spændinger nu også påvirkes indad af plasmaets partikeltryk, som altså blot skal adderes til det isotrope magnetfeltryk  $B^2/2\mu_0$ . Dette partikeltryk er angivet nederst i listen på fig. 1, men i parentes, da det jo kun optræder, når vi betragter et plasmatilfælde.

I nogle eksempler viser vi nu, hvordan man ved hjælp af de fundne magnetiske spændinger kan beregne ligevægtsbetingelser for magnetisk indesluttet plasmaer. Vi vælger igen at betragte volumener med form som magnetfeltlinierør og med passende symmetriegenskaber og udnytter, at summen af alle spændingskræfter, partikeltrykket inkluderet, skal være nul.



Figur 7. Trykbalance i  $Z$ -pinchen.

### Plasma i homogent magnetfelt ( $\Theta$ -pinch)

Vi betragter en lang, cylindrisk plasmasøjle, som er indesluttet i et på trykt homogent magnetfelt,  $B_{0z}$ . Søjleaksen og magnetfeltet er parallel med  $z$ -retningen, se fig. 6. Søjleens radius er  $R$ . Vi antager, at problemet er symmetrisk omkring  $z$ -aksen, således at plasmatrikket,  $p(r)$ , og magnetfeltet,  $B_z(r)$ , kun afhænger af  $r$ . Vi vælger at se på et volumen af form som en halv cylinderskal beliggende i den positive  $y$ -halvplan og med indre radius,  $r_0$ , og ydre ( $r_0 + \Delta r$ ), som vist skyggelagt på fig. 6. Længden i  $z$ -retningen er  $L$ . Vi ser på  $y$ -komponenten af de kræfter, der påvirker skallen. Hverken de magnetiske trækkræfter eller partikeltrykkrafterne på skallens endeflader ved  $z = 0$  og  $z = L$  har komponenter i  $y$ -retningen. Alle vægge i skallen, der er parallelle med  $z$ -aksen, påvirkes af de to isotrope tryk,  $B_z^2(r)/2\mu_0$  og  $p(r)$ . Skallen kan kun være i ligevægt, hvis summen af disse tryk overalt er den samme. Betingelsen for ligevægt er altså

$$p(r) + B_z^2(r)/2\mu_0 = \text{konst.} = B_{0z}^2/2\mu_0, \quad (2)$$

hvilket viser, at  $B_z(r) \leq B_{0z}$ . Man siger, at plasmaet er diamagnetisk. Der må cirkulere nogle strømme i plasmaet, som delvis afskærmer det ydre magnetfelt. I dette simple tilfælde med rette magnetfeltlinier svækker plasmaet magnetfeltet lige præcis så meget, at summen af magnetfeltrykket og partikeltrykket overalt er lig magnetfeltrykket uden for plasmaet. Den konfiguration, vi har betragtet, kaldes en  $\Theta$ -pinch, fordi de diamagnetiske strømme løber i  $\Theta$ -retningen.

### Ret strømførende plasmasøjle i selvgenereret magnetfelt ( $Z$ -pinch)

Vi betragter en ret, cirkulær plasmasøjle, der holdes indesluttet i et magnetfelt,  $B_\Theta(r)$ , som er genereret af en aksial strøm,  $I_p$ , i plasmaet. Feltlinierne løber altså

rundt om plasmasøjlen som vist på fig. 7. Søjleens radius er igen  $R$ , og den antages at være symmetrisk omkring  $z$ -aksen, således at plasmatrikket,  $p(r)$ , og magnetfeltstyrken,  $B_{\Theta}(r)$  kun afhænger af  $r$ .

### B) Magnetiske spændinger i plasmaer

Et stationært plasma, der er indesluttet i et magnetfelt, beskrives ved (A.1), (A.2) og

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (\text{A.10})$$

Sammenhængen mellem plasmastrømtætheden  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  og partikeltrykket  $p(\mathbf{r})$  i (A.10) er let at fortolke. Lad os forestille os, at plasmatrikket har en gradient. Et volumenelement i plasmaet vil så påvirkes af en trykkraft, der er proportional med  $\nabla p$  og pegende i  $-\nabla p$ -retningen. Plasmaet kan kun være stationært, hvis der kan kompenseres for denne kraft. Som det fremgår af (A.10) kompenserer Lorentz-kraften  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  netop for trykkraften. Bemærk, at da  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  står vinkelret på  $\mathbf{B}$ , kan Lorentz-kraften ikke kompensere for  $\nabla p$ -kræfter parallelt med magnetfeltlinierne. I et stationært plasma er plasmatrikket derfor konstant langs en feltlinie.

Elimination af  $\mathbf{j}$  i (A.1) og (A.10) giver

$$\mathbf{f}_{pl} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p = 0, \quad (\text{A.11})$$

der ved brug af (A.5) kan skrives

$$\mathbf{f}_{pl} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} - \nabla p = 0. \quad (\text{A.12})$$

Integration af (A.12) over et volumen  $V$  giver i analogi med udledningen af (A.9) følgende udtryk for de resulterende spændings- og trykkrafter på  $V$

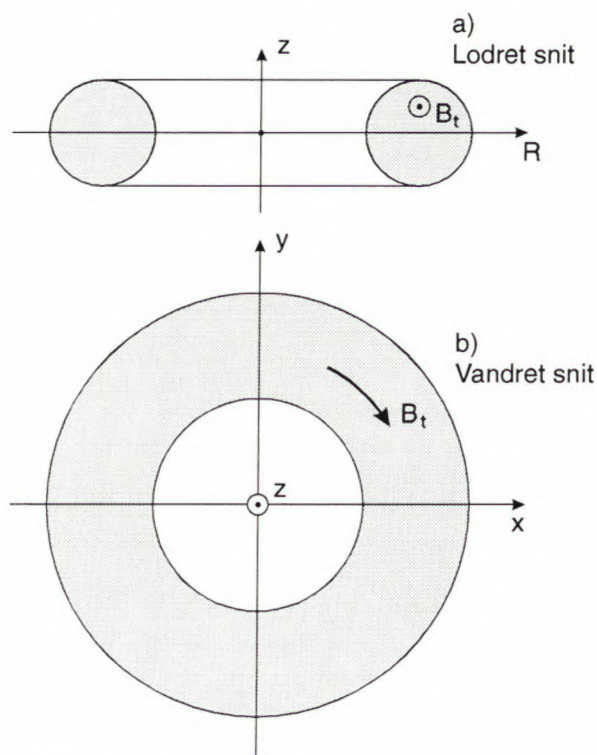
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{pl} &= \int_V \mathbf{f}_{pl} dV & (\text{A.13}) \\ &= \int_S \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{\mu_0} dS - \int_S \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + p \right) \mathbf{n} dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bemærk at udtrykket (A.13) for  $\mathbf{F}_{pl}$  kun afviger fra (A.9) ved, at plasmatrikket  $p$  adderes til magnetfelttrykket  $B^2/2\mu_0$  i integranten i sidste led i (A.13). Den geometriske fortolkning for plasmatilfældet er derfor den samme som for vakuumtilfældet blot skal plasmatrikket nu tages med (se fig. 1).

Ved plasmaoverfladen er  $B_{\Theta}(R) = \mu_0 I_p / 2\pi R$ . Vi ser først på det simpleste tilfælde, hvor al strømmen løber i plasmaets overflade, og hvor der derfor kun er magnetfelt uden for plasmaet. Inde i plasmaet hersker der så et konstant tryk  $p(r) = p_0$ . Trykbalance på plasmaoverfladen mellem det udadrettede partikeltryk og det indadrettede magnetfelttryk kræver derfor  $B_{\Theta}^2(R)/2\mu_0 = p_0$ .

I det generelle tilfælde vil plasmastrømmen,  $I_p$ , være fordelt over søjlens tværsnit, og der vil så også være  $B_{\Theta}$ -felt inde i plasmaet. For at finde betingelsen for trykligevægt ser vi igen på  $y$ -komponenten af kræfterne på en skal som under diskussionen af  $\Theta$ -pinchen ovenfor (se fig. 7). På ydersiden påvirkes skallen i den negative  $y$ -retning af partikeltrykket  $p(r_0 + \Delta r)$  og af magnetfelttrykket,  $B_{\Theta}^2(r_0 + \Delta r)/2\mu_0$ . På indersiden påvirkes skallen i den positive  $y$ -retning af  $p(r_0)$  og af  $B_{\Theta}^2(r_0)/2\mu_0$ . Endelig påvirkes de to endeflader i  $y$ -retningen af partikeltrykket,  $p(r_0)$ , og i den negative  $y$ -retning af magnetfelttrækket,  $B_{\Theta}^2(r_0)/2\mu_0$ . Interesserede læsere inviteres til at sætte summen af kræfterne lig nul og vise, at trykbalanceligningen bliver

$$\frac{d}{dr} \left\{ p(r) + \frac{B_{\Theta}^2(r)}{2\mu_0} \right\} + \frac{B_{\Theta}^2(r)}{\mu_0 r} = 0. \quad (3)$$

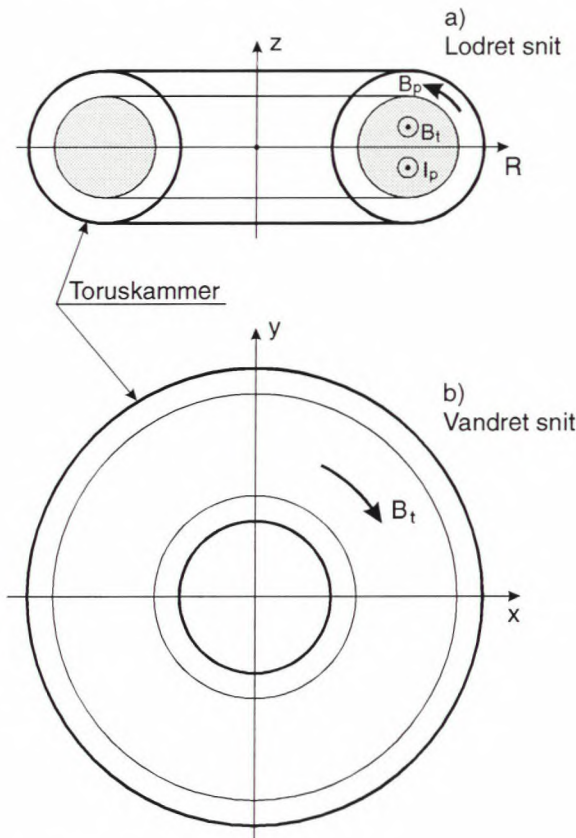


Figur 8. Plasma i rent toroidalt felt.

### Plasmaring i rent toroidalt magnetfelt

Et fusionsplasma skal holdes indesluttet i et magnetfelt, der hindrer det i at komme i kontakt med væggene i det omliggende kammer. Da plasmaets ladede partikler kan bevæge sig frit langs magnetfeltlinierne, er det nødvendigt,

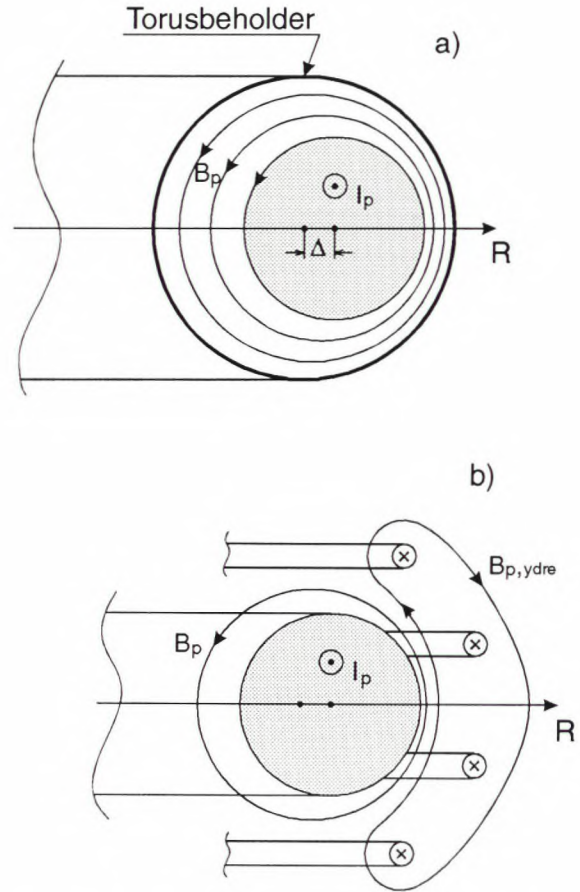
at disse linier på intet sted skærer gennem kammerets vægge. Et toroidalt felt, hvor feltlinierne er koncentriske cirkler, er den simpleste konfiguration, der opfylder dette krav. Kammeret har form som en torus (bilslangeform), og feltet genereres enten af en enkelt ret strømleder langs torusaksen eller af en række spoler, der ligger rundt omkring torus. Plasmaet ligger som en lukket ring i torus, se fig. 8, hvor toruskammeret er udeladt. Ved brug af magnetiske spændinger, vil vi nu vise, at plasmaringen ikke kan være i ligevægt i dette rent toroidale felt.



Figur 9. Plasma i tokamakfelt.

Vi ser på den halvdel af plasmaringen, som i det vandrette snit i fig. 8b) ligger i den positive  $y$ -halvplan, og betragter de kræfter, der påvirker denne halvring i  $y$ -retningen. Vi ser først på feltet, som det ville have været på plasmaringens overflade, hvis plasmaet ikke havde været til stede. Det har en  $r^{-1}$ -afhængighed, og vi ved fra diskussionen af vakuumsfelter i første del af denne artikel, at summen af alle magnetiske kræfter på et vilkårligt volumenelement i et vakuumsfelt er lig 0. Altså balancerer  $y$ -komponenten af de magnetiske trykkræfter, der påvirker det halvringformede elements krumme overflade i  $y$ -retningen, eksakt de magnetiske trækker kræfter, der påvirker elementets plane endeflader i den negative  $y$ -retning. Vi fylder nu plasma i elementet. Da der ikke flyder nogen plasmastrøm i toroidal retning, er feltet på elementets krumme overflade uændret, og det samme vil nu gælde for den resulterende kraft i  $y$ -retningen, der skyldes dette felts påvirkning af denne overflade. Feltet inde i plasmaet vil imidlertid

svækkes på grund af den diamagnetiske virkning, der er diskuteret ovenfor under  $\Theta$ -pinchen. Resultatet bliver, at det magnetiske træk i endefladerne formindskes og bliver for lille til at balancere kraften på den krumme overflade. Plasmaringen er ikke i ligevægt, den vil ekspandere i  $y$ -retningen. Det bør nævnes, at ekspansionstendensen forstærkes yderligere af, at partikeltrykket nu også påvirker endefladerne med en trykkraft i  $y$ -retningen.



Figur 10. a) Plasma i balance i tokamak med perfekt ledende torusvægge. b) Plasma i balance i tokamak med poloidale spoler.

## Tokamakken

Der er forskellige muligheder for at modificere den rent toroidale konfiguration, så plasmaligevægt opnås. Tokamakken, der er vist på fig. 5, er den, der har opnået den hidtil bedste plasmaindeslutning. Brug af de magnetiske spændinger gør det muligt at give en kvalitativ forklaring på, hvorfor tokamakplasmaet er i ligevægt.

En tokamak har også et toroidalt felt som diskuteret ovenfor, det er genereret af en række spoler lagt rundt omkring toruskammeret (vist på fig. 5, men ikke på fig. 9). For at kompensere for den resulterende kraft i  $y$ -retningen på den halve plasmaring i det rent toroidale felt, som diskuteret i forrige afsnit, sendes der i en tokamak en plasmastrøm,  $I_p$ , rundt i plasmaet. Denne strøm genererer et poloidalt magnetfelt,  $B_p$ , hvis feltlinier løber rundt om

plasmaringen som vist på fig. 9a). I sig selv kan  $B_p$ -feltet ikke kompensere for  $B_t$ -feltets resulterende kraft i y-retningen, idet det i endnu større grad end  $B_t$ -feltet er stærkere på indersiden af plasmaringen end på ydersiden. Derfor påvirker det også den halve plasmaringens krumme overflade med en y-rettet kraft. Kun ved kunstigt at forøge  $B_p$ -feltet på ydersiden (og måske svække det på indersiden) kan den resulterende kraft på ringen vendes til at gå i den negative y-retning. Dette kan opnås på to måder som antydtes på fig. 10. I a) er plasmaet indesluttet i en torusbeholder med perfekt ledende vægge, det betyder, at  $B_p$ -feltlinierne ikke kan trænge gennem dem. En lille forskydning,  $\Delta$ , af plasmatværsnittets centrum fra torustværsnittets centrum bevirker derfor, at  $B_p$ -feltet forøges på plasmaringens yderside og svækkes på indersiden. Det medfører så et indadrettet  $B_p$ -felttryk på plasmaringen, og ligevægt kan opnås. I b) er der lagt en række ydre poloidale spoler langs plasmaringen, de påtrykkes en strøm modsat rettet plasmastrømmen. Superpositionen af de ydre spoles felt,  $B_{p,ydre}$ , og plasmastrømmens felt,  $B_p$ , bliver et stærkt felt på plasmaets yderside. Herved opnås, at det samlede tryk af  $B_p$ - og  $B_{p,ydre}$ -felterne er indadrettet, og ligevægt kan opnås.

### Hvad et kuglelyn ikke er

I litteraturen er der mange beretninger om observationer af såkaldte kuglelyn. Kuglelyn synes at kunne opstå uden påviselig grund, men ofte i forbindelse med tordenvejr. De udgør en form for lysende legemer, der ofte bevæger sig, og som somme tider opløses i mindre eksplosioner. Om kuglelyn er et virkeligt eksisterende fænomen, er stadig under diskussion. En af de fremsatte fysiske forklaringer på kuglelyn er, at de dannes i forbindelse med tordenvejr og er en slags afsnørede lyn. I et kuglelyn skulle der så løbe elektriske strømme rundt i det lysende legeme, som skulle være i plasmatilstanden. Disse strømme skulle generere magnetfelter omkring legemet, som skulle holde det indesluttet. Ud fra grundligningerne (A.1), (A.2) og (A.10) for magnetisk indesluttet plasma er det muligt generelt at vise, at et plasma ikke kan holdes indesluttet af magnetfelter, der genereres af strømme, der alle kun løber inde i plasmaet. Dette såkaldte virialteorem er ret kompliceret at vise. Som sidste eksempel på brug af magnetiske spændinger vil vi vise, at en simpel symmetrisk plasmaring som den, der er vist på fig. 8, ikke kan holdes indesluttet i magnetfelter, som alene er genereret af strømme i selve ringen. Strømme i ringen kan løbe rundt i den toroidale retning og i den poloidale retning. Toroidale strømme genererer et poloidalt magnetfelt uden for plasmaet, men som også kan løbe i plasmaet. Poloidale strømme genererer et toroidalt magnetfelt, som kun løber inde i plasmaet. Vi ser igen på den halvdel af plasmaringen, som på fig. 8b) befinder sig i den positive

y-halvplan. Partikeltrykket,  $p$ , mod endefladerne påvirker den med en kraft i y-retningen. Denne kraft kan kun kompenseres af trækraften af et toroidalt magnetfelt,  $B_t$ , hvor  $B_t^2/2\mu_0 \geq p$ . På plasmaets krumme overflade virker der nu et udadrettet tryk, som er summen af partikeltrykket og det toroidale magnetfeltryk. Dette kan kun balanceres af et indadrettet tryk af det poloidale magnetfelt  $B_p$ , hvor så  $B_p^2/2\mu_0 \geq B_t^2/2\mu_0 + p$ . Da dette  $B_t$ -felt på grund af dets større styrke på plasmaringens inderside har en resulterende kraft i y-retningen som mindst er lig  $B_t$ -feltets trækraft i den negative y-retning, ses det, at der ikke er mulighed for ved hjælp af de mulige magnetfelter at holde plasmaringen sammen.

Et kuglelyn er altså ikke en aksesymmetrisk plasmaring, der holdes indesluttet af magnetfelter, der alene er genereret af strømme i plasmaet.

### Afsluttende bemærkninger

I denne artikel har vi diskuteret, hvordan magnetfelter kan opfattes som spændingstilstande, der transmitterer kræfter fra et sted i rummet til et andet. Denne måde at opfatte magnetfelter på er især nyttig inden for plasmafysikken, da man her kan udnytte, at man blot skal addere plasmaets partikeltryk til de magnetiske spændinger for at få et samlet billede af de kræfter, der påvirker et plasma. Andre felter, som f.eks. elektriske felter eller tyngdefelter kan behandles på tilsvarende måde, og man vil finde, at de også kan opfattes som spændingstilstande, der transmitterer kræfter gennem rummet. Da det imidlertid mest er opfattelsen af de mere komplicerede magnetiske kræfter, og især deres vekselvirkning med plasmaer, der lettes ved at indføre magnetiske spændinger, har vi her begrænset os til at betragte magnetfelter.

### Referencer:

- 1) V.O. Jensen, *Magnetic Stresses in Ideal MHD Plasmas.*, Physica Scripta **51**, 490 (1995)



Vagn O. Jensen er dr.phil. i plasmafysik. Han er ansat i fusionsforskningsenheden på Risø og som ekstern lektor på DTU.