

Om geostrofisk vind

Aksel Wiin Nielsen, Collstrop Fonden

En af de gamle vejrregler siger, at når man står med vinden i ryggen, så har man det lavere lufttryk til venstre og det høje til højre (på den nordlige halvkugle). Denne regel siger jo kun, at vinden blæser langs med isobarerne, og at der derfor må være ligevægt mellem trykkraften og andre kræfter.

Den horisontale vind i atmosfæren er geostrofisk, hvis der er ligevægt mellem de horisontale komponenter af trykkraften og Corioliskraften. I denne artikel bruger vi ordet "Corioliskraft", som defineres som en vektor, der er modsat af Coriolisaccelerationen. Da trykkraften er vinkelret på isobarerne og Corioliskraften er vinkelret på den horisontale vind og virker til højre på den *nordlige* halvkugle, vil den geostrofiske vind blæse langs med isobarerne med det lave tryk på den venstre side. Det er naturligvis klart, at hvis man skal have en nøjagtig geostrofisk balance, må isobarerne være rette linier. Hvis de ikke er rette linier, må der mindst endnu en kraft til, hvis bevægelsen skal følge isokurverne for geopotentialet.

Observationerne viser, at den virkelige horisontale vind er næsten geostrofisk udenfor det tropiske og subtropiske område i den såkaldte frie atmosfære, d.v.s. over det atmosfæriske grænselag nær ved Jordens overflade, hvor gnidningen mellem atmosfæren og Jordens overflade forhindrer den geostrofiske ligevægt. Da Corioliskraften er lille nær ved ækvator, fordi dens størrelse er proportional med sinus til breddegraden, kan der ikke være geostrofiske vinde på de meget lave breddegrader.

Det er forbavsende, at der i en så stor del af atmosfæren findes en kvasi-ligevægt, som betyder, at den horisontale del af accelerationen er lille sammenlignet med de to kræfter. På den ene side giver den geostrofiske kvasi-ligevægt en stor hjælp, når man skal analysere atmosfæren, specielt i områder, hvor der er langt mellem observationerne. På den anden side skaber kvasi-ligevægten store problemer i atmosfæriske forudsigelser. Disse problemer førte i 1950'erne til de såkaldte kvasi-geostrofiske modeller, hvor man antager, at vorticiteten og den horisontale vind kan beregnes geostrofisk. Disse modeller anvendes ikke så meget mere, fordi man har lært at integrere de såkaldt primitive modeller, hvilket betyder, at man integrerer de horisontale bevægelsesligninger, den termale ligning og kontinuitetsligningen for både den tørre del og den fugtige del af atmosfæren under den antagelse, at atmosfæren er i hydrostatisk ligevægt.

Siden 1930'erne er der fremsat forskellige forsøg på at vise, hvorfor atmosfæren er i kvasi-geostrofisk ligevægt. De først foreslåede modeller er skabt af

Rosby [1], men andre mere indviklede modeller er undersøgt af Cahn [2], Obukhov [3], Bolin [4], Kibel [5], Winninghoff [6], Blumen [7] og Kuo [8]. Fælles for alle disse modeller er, at ingen af dem tager hensyn til den atmosfæriske opvarmning eller til friktionen i atmosfæren, men den kvasi-geostrofiske ligevægt er jo også til stede i den virkelige atmosfære, hvor disse to processer virker. I de kommende afsnit af denne artikel, skal jeg forsøge at demonstrere, at den geostrofiske ligevægt også opstår, når opvarmningen og friktionen er til stede. En anden svaghed i de omtalte modeller er, at flere af dem er lineære, hvilket betyder, at man ikke tager hensyn til advektionsleddene i bevægelsesligningerne og den termodynamiske ligning. Disse processer vil også findes i de numeriske eksperimenter, som skal beskrives i de følgende afsnit.

Formålet med denne artikel er derfor at undersøge om relativt enkle modeller er i stand til at komme til en kvasi-geostrofisk tilstand, når de integreres med hensyn til tiden. Modellerne kan formuleres enten som zonale eller som meridionale modeller, når man er villig til at forenkle de grundlæggende ligninger. Med hensyn til ligningerne er det klart, at man ikke kan anvende de velkendte kvasi-geostrofiske modeller, fordi man her går ud fra de resultater, som modeller gerne skulle producere. De grundlæggende modeller bygger derfor på forenklede former af de to bevægelsesligninger for de horisontale komponenter af hastigheden, på kontinuitetsligningen og på den termodynamiske ligning. Undersøgelserne deles i zonale og meridionale tilfælde, som behandles hver for sig. Der er også en model, hvor ligningerne er integreret i to horisontale dimensioner.

I det generelle tilfælde skal man have opvarmningen som en del af den termodynamiske ligning. Man kan imidlertid forenkle behandlingen, hvis man indfører en ydre påvirkning i kontinuitetsligningen. Normalt udtrykker denne ligning naturligvis massens bevarelse, men hvis vi betragter en homogen væske med en vandret overflade kan man forestille sig, at man i nogle områder forøger væskemængden, medens man i andre områder formindsker den på en sådan måde, at den totale væskemængde forbliver uforandret. Denne behandling af kontinuitetsligningen skal vi anvende i de mest forenklede tilfælde. Enkelthederne kan findes i Wiin-Nielsen [9].

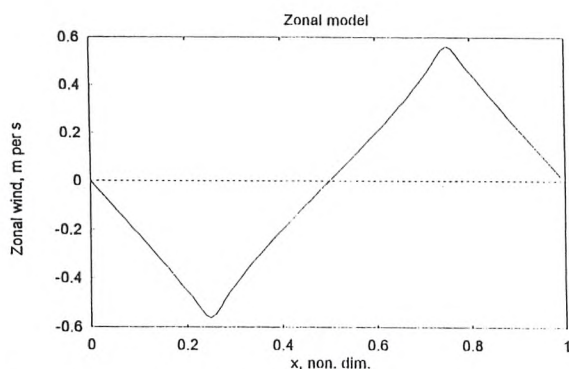
En zonal model

I den zonale model har vi kun vest-øst variationer. Bevægelsesligningerne og kontinuitetsligningen kan

derfor skrives som angivet i systemet (1).

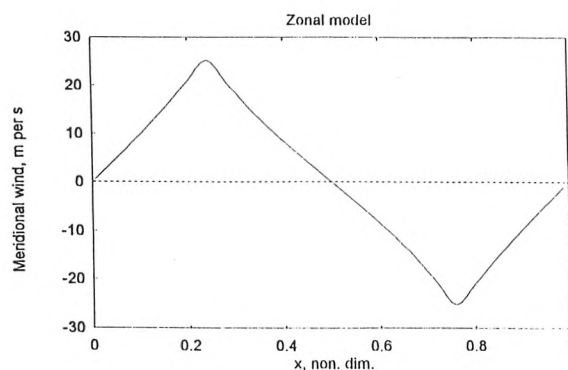
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + f v - \epsilon u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= -f u - \epsilon v \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Phi_0 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial u}{\partial x} &= g S(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$S(x)$ er den ydre påvirkning af systemet. Dimensionen af S er m per s, og S angiver den væskemængde, som tilføres ($S > 0$) eller fjernes ($S < 0$) fra væskemængden, således at gennemsnittet af S er nul. u og v er den zonale og den meridionale hastighedskomponent, medens ϕ er geopotialet. Φ_0 er geopotialet, når væsken er i ro. Hvis Φ_0 skal svare til atmosfæren er værdien af størrelsesordenen $10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, men der er naturligvis også andre anvendelser, f.eks. i oceanografien.



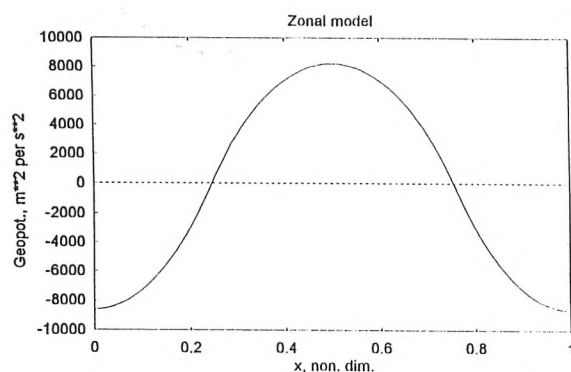
Figur 1. Zonal vind i den zonale model, m per s.

Integrationen af ligningerne i (1) udføres, når $S(x)$ er blevet valgt. I alle tilfælde, behandlet i dette afsnit, starter integrationen fra en tilstand uden bevægelse ligesom den variende del af geopotialet sættes til nul. Tidsintegrationerne af (1) udføres for en given breddegrad, som i figurerne altid er 45 grader nord. Man har et valg med hensyn til den metode, som anvendes ved tidsintegrationen. Man kan enten bruge endelige differencer eller den spektrale metode. I alle de een-dimensionale tilfælde er integrationen udført, når ligningerne er omsat til bølgetalsområdet. Enkelthederne i udledningen af de nye ligninger er ikke væsentlig for forståelsen af resultaterne, og derfor er disse ligninger ikke udledt i denne tekst. De findes i den engelske udgave (Wiin-Nielsen [10]). Det skal dog nævnes, at de ikke-lineære led fører til dobbelte summeringer, som bestemmer udvekslingerne mellem de forskellige spektrale komponenter. Integrationerne er udført med et største bølgetal lig med 20, hvilket svarer til en bølgelængde på 1400 km, idet den totale længde af breddecirclen på 45 grader er ca. 28000 km.



Figur 2. Meridional vind i den zonale model, m per s.

I det første tilfælde er funktionen $S(x)$ defineret således, at den er konstant og positiv i intervallet $0.25 < x < 0.75$ og konstant og negativ udenfor dette interval. Med denne fordeling af $S(x)$ vil man forvente, at væsken vil bevæge sig fra midten til begge sider. Figur 1 viser, at dette er tilfældet, idet $u < 0$ for $x < \frac{1}{2}$, medens $u > 0$ for $x > \frac{1}{2}$. Med denne bevægelse vil man også forvente, at den meridionale hastighed vil være positiv for $x < \frac{1}{2}$, fordi Corioliskraften vil dreje partiklerne mod højre, medens de partikler, som befinder sig i områder $x > \frac{1}{2}$ vil resultere i en sydgående hastighed, d.v.s. $v < 0$, som det også ses på figur 2. Opmærksomheden henledes på, at størrelsen af den zonale vind er meget mindre end den meridionale vind. Endeligt er det jo klart, at da man adderer væsken i midterområdet og tager den bort i de andre områder, får man en variation af geopotialet som vist i figur 3. Det sidste led i eksperimentet er at beregne den geostrofiske vind fra fordelingen af geopotialet som vist i figur 3 og sammenligne denne fordeling med fordelingen af den meridionale vind i eksperimentet. Som det ses i figur 4 er v -komponenten geostrofisk med stor nøjagtighed. Sluttilstanden er en stationær tilstand, som man nærmer sig nok så langsomt under integrationen. Denne tilstand er kvasi-geostrofisk, fordi den meridionale komponent er næsten geostrofisk, medens den zonale komponent er lille som set i figur 1.



Figur 3. Geopotialet i den zonale model, $\text{m}^2 \text{ per s}^2$.

Det er naturligvis ikke svært at bestemme den stationære tilstand af de tre ligninger i (1), hvis man ser bort fra de ikke-lineære advektions led i ligningerne. Man kan imidlertid se, at de ikke-lineære led giver et bidrag til den stationære tilstand ved at sammenligne den beregnede stationære tilstand opnået ved integration af ligningerne indtil den stationære tilstand er nået med den stationære tilstand, som kan bestemmes fra de lineære ligninger. Figur 5 viser den nok så store forskel, som findes mellem de to stationære tilstande for den meridionale vind komponent. Det er derfor vigtigt, at de ikke-lineære led tages med i integrationen. Figur 5 er taget fra et andet tilfælde, hvor $S(x)$ er beskrevet med en cosinus funktion, som er positiv i midten af området og ellers negative. En tilsvarende stor forskel ses i figur 6, der viser geopotentialet for de to tilfælde.

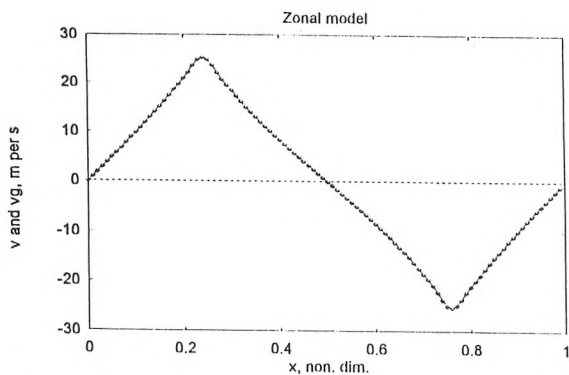


Figure 4. Sammenligning af v og v_g i den zonale model, m per s

I de resultater, der er vist i figurerne 1 til 6, er integrationen gennemført for 20 dage, fordi det tager denne lange tid før modellen kommer i en virkelig stationær tilstand. Man kan imidlertid spørge, om det tager tilsvarende tidsintervaller for at komme frem til den kvasi-geostrofiske tilstand. Figur 7 viser en sammenligning mellem v og v_g efter integration på 24 timer. Man ser, at forskellen mellem de to meridionale komponenter er relativt lille og efter integration til 36 timer, har man opnået, at de to komponenter er næsten sammenfaldende. Erfaringen med disse beregninger viser, at selvom man efter en dag eller to er ganske nær ved geostrofisk ligevægt, så kan svingninger med en lille amplitude fortsætte i ganske lang tid. Til trods for disse svingninger kan man sige, at den kvasi-geostrofiske tilstand i denne model er næsten fuldført efter et par dage.

En meridional model

Denne model er formuleret følgende de samme principper som indledningen, idet man blot i dette tilfælde ser på variationerne i syd-nord retningen. Ligningerne bliver derfor i dette tilfælde et sæt ligninger, som ligner

dem, som findes i (1). De nye ligninger er givet i (2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= f v - \epsilon u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - f u - \epsilon v \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Phi_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \phi \frac{\partial v}{\partial y} &= g S(y) \end{aligned} \quad (2)$$

I dette tilfælde må man behandle f som en variabel i y -retningen. Normalt udtrykkes denne variation som $f = f_o + \beta y$, men da ligningerne, ligesom i det indledende afsnit, integreres ved hjælp af rækkeudviklinger i bøljetalsområdet er det ønskværdigt, at variationen af f udtrykkes på samme måde som de andre variable. Efter en kort udregning kommer man derfor til formuleringen, der er givet i (3).

$$f = \frac{f_N + f_S}{2} - \frac{f_N - f_S}{2} \cos(\pi y/D) \quad (3)$$

hvor værdien på f ved den nordlige og den sydlige grænse kan beregnes, når integrationsområdet er centreret på 45 grader nord og D angiver syd-nord afstanden for integrationsområdet. Også i dette tilfælde er ligningerne omformet til bølgetalsområdet før tidsintegrationen udføres. Ligningerne i bølgetalsområdet kan ses i den engelske udgave. I denne model vil man forvente, at det er den zonale komponent, som bliver geostrofisk, medens den meridionale vind komponent skulle blive relativt lille i sammenligning med de zonale komponent af den horisontale vind vektor.

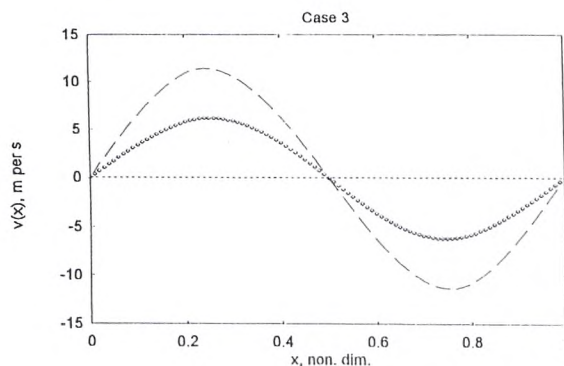
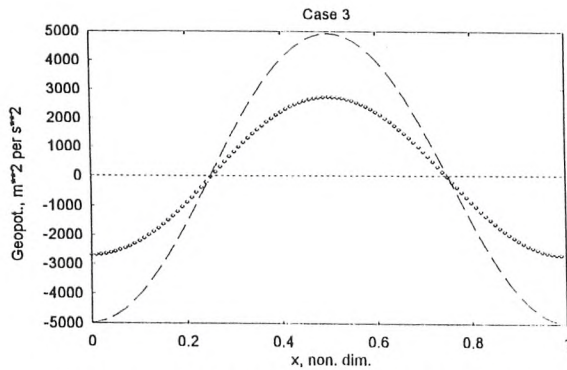


Figure 5. Sammenligning af den meridionale vindkomponent i den lineære og den ikke-lineære model, m per s.

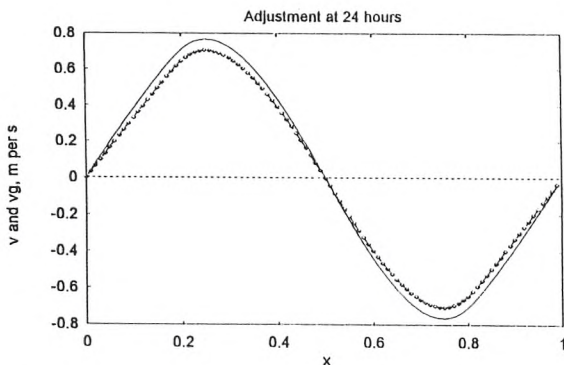
I integrationen er $S(x)$ positiv i den sydlige halvdel og negativ i den nordlige halvdel med en maksimal værdi på 0.01 m per s i den sydlige halvdel og symmetrisk omkring midtpunktet, se figur 8. Den zonale vindkomponent i den asymptotiske stationære tilstand er vist i figur 9 sammen med den geostrofiske zonale vindkomponent. Man ser, at også i dette tilfælde er der næsten fuldstændig geostrofisk tilpasning.

Ligesom i den zonale model skal det undersøges, hvornår denne geostrofiske tilpasning er fremkommet.

Efter en del integrationer viser det sig, at den ønskede tilstand ankommer efter 150 timers integration af model ligningerne, se figur 10. Den eneste afvigelse findes i nærheden af den sydlige grænse, hvor den geostrofiske vind u_g er lidt større end modelværdien u . Hvis integrationen stoppes efter 145 timer er der en noget større afvigelse mellem de to kurver, som man ser på figur 11, men nu er den geostrofiske kurve under u -komponenten i integrationen. Et tilsvarende fænomen findes ikke ved den nordlige grænse, som man kan se på figurerne 10 og 11. Forklaringen er formodentlig at finde i den minimale værdi på Coriolis parameteren ved den sydlige grænse, hvor man derfor behøver en længere tid for at få geostrofisk tilpasning.



Figur 6. Sammenligning af geopotentialt i den lineære og den ikke-lineære model, m^2 per s^2 .



Figur 7. v og v_g , m per s, efter integration i 24 timer.

En model med to niveauer, opvarmning og dissipation

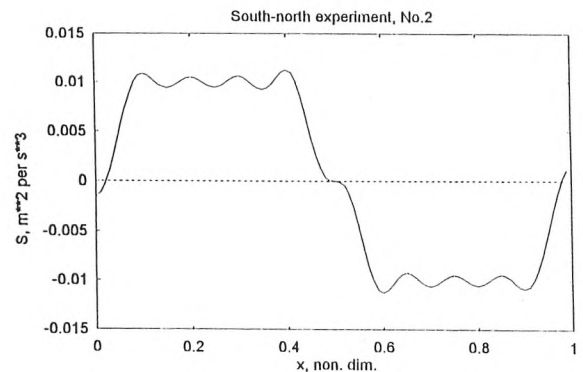
I denne model skal vi gå bort fra den form for ydre påvirkning, som er anvendt i de første enkle modeller. Modellen i dette afsnit er baseret på de primitive bevægelsesligninger, kontinuitetsligningen and den termodynamiske ligning. Også i dette tilfælde skal vi først se på en model, som kun har variationer i vest-øst retningen, hvorfor modellen vil have de uafhængige variable (x, t) , idet vi vælger en model med kun to niveauer i den vertikale retning. Vi begynder med at se på konti-

nuitetsligningen, når vi anvender grænsebetingelserne, at den vertikale p -hastighed (ω) er nul ved atmosfærens top og ved 1000 hPa. Hovedniveauerne i modellen er 0, 250, 500, 750 og 1000 hPa. De markeres med tallene 0, 1, 2, 3, 4. Selve kontinuitetsligningen er med vore restriktioner forenklet som vist i (4).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

(4) anvendes på niveauerne 1 og 3, og differentiallet af ω erstattes af endelige differencer, som bestemmes af grænsebetingelserne ved atmosfærens top og bund. Man får da ligningerne, som er vist i (5).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\omega}{P} &= 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\omega}{P} &= 0 \\ P &= 500\text{hPa} \end{aligned} \quad (5)$$



Figur 8. Væske tilføjes i den sydlige halvdel og fjernes i den nordlige halvdel, m per s.

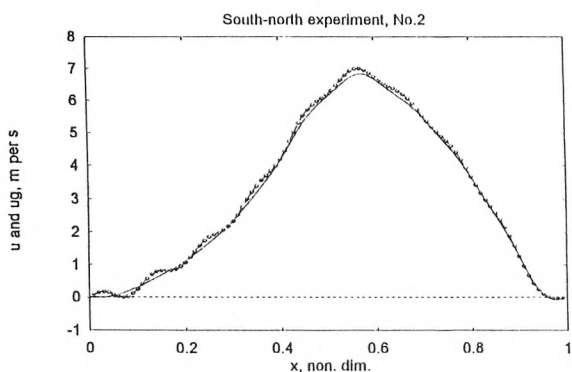
Som sædvanligt skal vi addere og subtrahere disse to ligninger, og vi får da resultatet, som er angivet i (6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\star}{\partial x} &= 0 \\ \omega &= -P \frac{\partial u_T}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

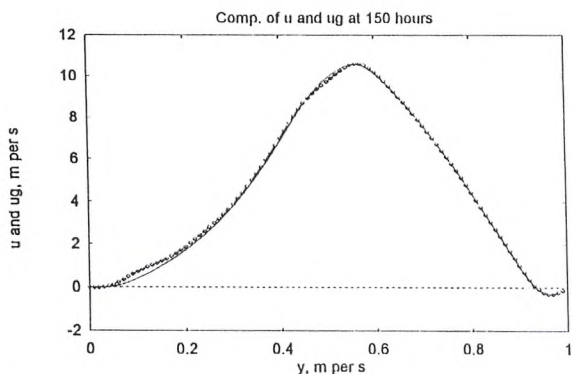
I (6) er størrelser med \star den halve sum af værdierne på niveauerne 1 og 3, medens størrelser med T er den halve differens af værdierne på de samme niveauer. På grund af vor begrænsning til een dimension finder vi derfor, at u_\star må være en konstant i modellen. Da denne konstant kun er en forskydningshastighed, kan vi uden at tabe noget sætte $u_\star = 0$. Derefter anvender vi bevægelsesligningerne på niveauerne 1 og 3 og lægger sammen og trækker fra, medens den termodynamiske ligning anvendes på niveau 2. Resultaterne af disse ma-

nipulationer er angivet i (7).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_T}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} + f v_T - \epsilon u_T \\ \frac{\partial v_*}{\partial t} &= -u_T \frac{\partial v_T}{\partial x} \epsilon v_* \\ \frac{\partial v_T}{\partial t} &= -u_T \frac{\partial v_*}{\partial x} - f u_T - \epsilon v_T \\ \frac{\partial \Phi_T}{\partial t} &= \frac{1}{2} \kappa Q - \frac{1}{2} \sigma P^2 \frac{\partial u_T}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$



Figur 9. Den zonale komponent sammenlignet med den zonale, geostrofiske komponent i syd-nord modellen, m per s efter integration til stationær tilstand.



Figur 10. Som figur 10, men integrationstiden er 150 timer.

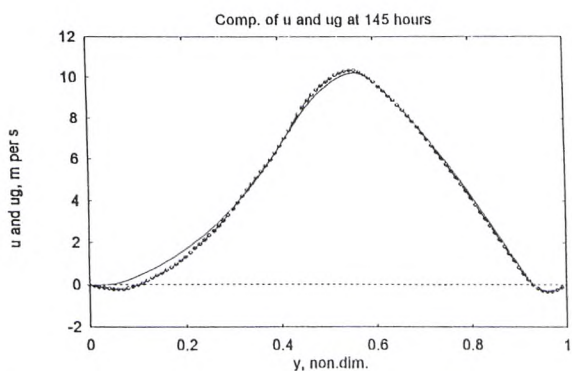
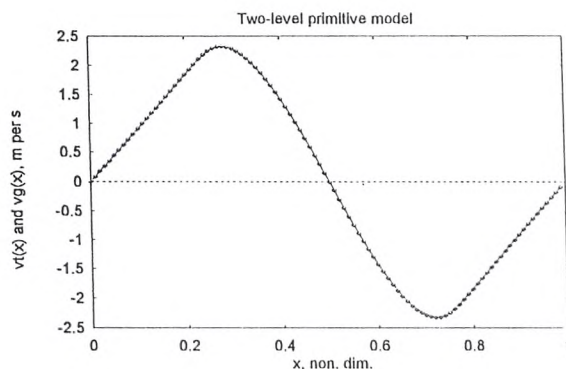
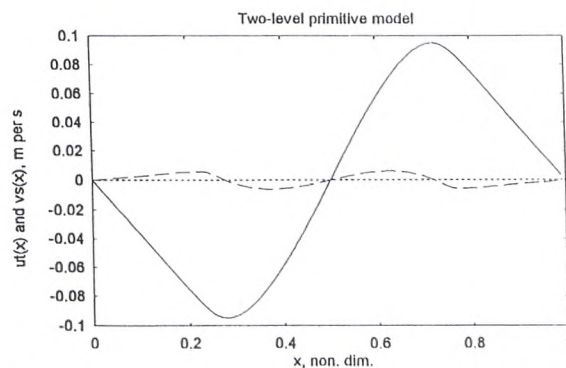


Fig. 11. Som figur 10, men integrationstiden er 145 timer.

Ligningerne i (7) skal integreres med hensyn til tiden, når opvarmningen (Q) er specificeret. Det bemærkes, at $\kappa = R/c_p$, og at $\sigma = -\alpha \delta(\ln(\theta))/\delta p$ er den sædvanlige parameter for atmosfærens stabilitet. Denne konstante værdi skal kun bruges på niveau 2. Som i de andre tilfælde er ligningerne i (7) omregnet til bølgetalsområdet, hvorefter de er blevet integreret med hensyn til tiden. Da det tager ganske lang tid at komme til en stationær tilstand, hvis man starter fra en tilstand uden bevægelse, har man i dette som i andre tilfælde en mulighed for at definere en begyndelsestilstand, som er bedre. Det gøres ved at beregne en tilstand under antagelse af små accelerationer og ved at se bort fra de ikke-lineære led. Som man kan se fra den sidste ligning i (7) kan man beregne u_T , når man kender opvarmningen. Tredie ligning giver derefter en bestemmelse af v_T , og man kan da beregne geopotentialet fra den første ligning. Under de givne forudsætninger får man da fra den anden ligning at v_* må antages at være nul. Denne begyndelsestilstand kommer noget hurtigere i nærheden af den ønskede virkelige stationære tilstand, selv om bidragene fra de ikke-lineære led slet ikke er i nærheden af nul, hvilket kan ses ved at sammenligne begyndelsestilstanden med den beregnede sluttilstand.



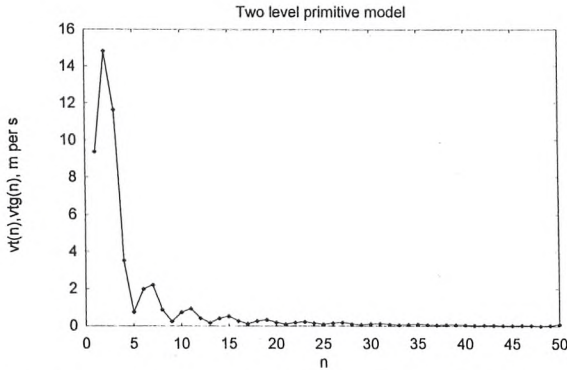
Figur 12. Den meridionale vindkomponent sammenlignet med den meridionale geostrofiske komponent, m per s, i modellen baseret på de primitive ligninger.



Figur 13. Den zonale termale vind komponent, m per s, og den meridional komponent på 500 hPa, m per s.

Figur 12, som indeholder $v_T(x)$ og $v_g(x)$, viser, at

også i dette tilfælde får man en geostrofisk tilpasning, som er meget nøjagtig, når man integrerer helt frem til en stationær tilstand. Samtidigt er de andre komponenter ganske små, som man kan se i figur 13, som viser $u_T(x)$ og $v_*(x)$ i den stationære tilstand. Som man kan se i figur 12 er de hastigheder, som opnås i den stationære tilstand relativt små. Det skyldes naturligvis, at den maksimale opvarmning er relativt lav i disse integrationer hvor den største værdier er $0.01 \text{ J}/(\text{kg s})$. Mere realistiske værdier opnås for større værdier af Q .

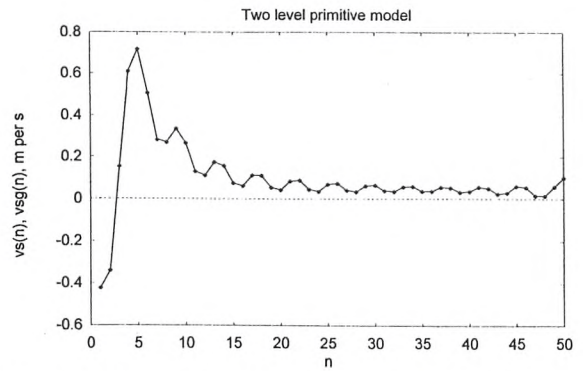


Figur 14. Sammenligning af den termale meridionale vindkomponent i modellen og den termale, meridionale, geostrofiske vindkomponent, m per s, som funktion af bølgetallet.

Det næste eksperiment er derfor udført med den maksimale værdi sat til $0.1 \text{ J}/(\text{kg s})$. Samtidigt skal vi i dette tilfælde præsentere resultaterne som funktion af bølgetallet. Integrationen er udført med den maksimale værdi på bølgetallet sat til 50. Da den totale længde af breddecirklen er ca. 28000 km på breddegraden 45, så vil den mindste bølgelængde være 560 km. Figur 14 viser v_T og v_{Tg} som funktion af bølgetallet. Den største værdi er nu ca. 15 m per s for bølgetal nummer 2, og der er geostrofisk tilpasning for alle bølgetal. På figur 15 finder man v_* som funktion af bølgetallet. Da vi i dette tilfælde har $u_* = 0$, bliver den første bevægelsesligning reduceret til en diagnostisk ligning, som kan ses i (8).

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial x} = f v_* \quad (8)$$

Denne udtrykker, at v_* er geostrofisk, som man også kan se i figur 15, hvor denne vindkomponent er beregnet som funktion af bølgetallet. Det eneste indhold i denne figur er naturligvis kun, at vore beregninger er korrekte. Samtidigt kan man se, at denne vindkomponent har sin maksimale værdi for $n=5$ svarende til 5600 km.



Figur 15. Sammenligning af den meridionale vindkomponent og den geostrofiske meridionale vind, begge på 500 hPa, som funktion af bølgetallet.

En model i to dimensioner

Alle modeller, som er beskrevet i de tidligere afsnit, har den egenskab, at den ene af de to vindkomponenter har en chance for at blive næsten geostrofisk, medens den anden komponent ikke kan være geostrofisk, fordi vi i alle tilfælde har afprøvet modeller med variationer i kun een retning, som enten er den zonale eller den meridionale retning. Man kunne endda få den opfattelse, at disse modeller er så langt fra virkeligheden, at de ikke vil gælde i to dimensioner. For at imødegå et sådant synspunkt skal vi i dette afsnit se på en model i to dimensioner. Vi vælger en model af samme slags, som de to vi begyndte med i afsnit 2 og 3.

Vi vælger en rektangulær region med længden L og bredden D . Ved den nordlige og den sydlige grænse skal den meridional vind være 0, medens vi skal antage, at bevægelsen er periodisk i vest-øst retningen. De grundlæggende ligninger er givet i (9).

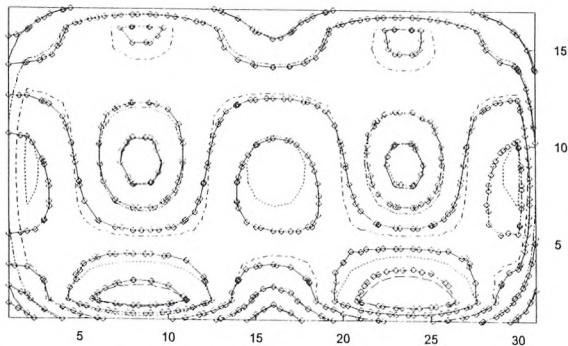
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + f v - \epsilon u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - f u - \epsilon v \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial y} &= \gamma (\phi_F - \phi) \end{aligned} \quad (9)$$

Man lægger mærke til, at $S(x, y)$ i denne model er skrevet på Newtonsk form, hvor $\gamma = 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Den valgte ydre påvirkning er givet i (10).

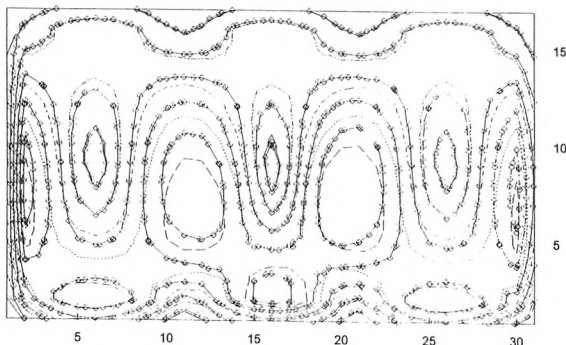
$$\phi_F = \phi_a \sin\left(\pi \frac{j-1}{j_m-1}\right) \sin\left(2\pi \frac{i-1}{i_m-1}\right) \quad (10)$$

I dette tilfælde blev integrationen udført med centrerede endelige differencer i tid og rum. Periodiske betingelser bruges ved den vestlige og den østlige grænse. Gridafstanden er 280 km, $\Delta t = 5$ minutter. I x -retningen går tælleren i fra 0 til 31, medens j (tælleren i den meridionale retning) går fra 0 til 17 i

y-retningen. Når tidintegrationen er gennemført beregnes de geostrofiske vindkomponenter fra det forudsagte geopotential-felt. Man kan da sammenligne de forudsagte vinde med de geostrofiske vinde.



Figur 16. Sammenligning af størrelserne af model vinden og den geostrofiske vind i den to-dimensionale model efter en integration på 75 timer.



Figur 17. Samme som figur 17, men for 37.5 timer.

Figur 16 viser to felter. Kurverne uden markering er størrelsen på vinden i modellen, medens de andre er størrelsen på den geostrofiske vind beregnet ved eksperimentets afslutning. Som man vil observere er der god overensstemmelse mellem de to kurvefamilier eller med andre ord: modellen viser udmærket geostrofisk tilpasning. Integrationstiden er 75 timer eller lidt over 3 dage. Figur 17 viser de samme to felter, når integrationen stopper ved den halve tid, altså 37.5 timer. Her er den geostrofiske tilpasning også godt på vej, men der er dog visse forskelle på de to felter. Vi kommer derfor igen til konklusionen, at den geostrofiske tilpasning tager 2 til 3 dage.

Forenkledede betragtninger

Det kan være passende at undersøge, om man kan få yderligere forståelse af geostrofisk tilpasning ved at se på et forenklet tilfælde, hvor man bestemmer den stationære tilstand ved at se bort fra tidsvariationerne og de ikke-lineære advektions led i ligningerne. Vi ved allerede, at advektionsprocesserne giver et væsentligt bidrag i den stationære tilstand, som fremkommer ved

tidsintegrationen. Det er derfor ikke muligt at få den samme og nøjagtige stationære tilstand fra de forenkledede ligninger, men man kan muligvis få yderligere forståelse af resultaterne. Vi ser på det to-dimensionale tilfælde. De forenkledede ligninger er i dette tilfælde givet i (11).

$$\begin{aligned} \Phi_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= gS(x, y) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x} + fv - \epsilon u &= 0 \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} - fu - \epsilon v &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Den første ligning kan bruges til at bestemme divergensen, når $S(x, y)$ er defineret. Imidlertid skal vi bruge de to sidste ligninger til at sammenligne den geostrofiske vind med vinden i den stationære tilstand. Disse vindkomponenter kan imidlertid deles i den ikke-divergente vind, som beskrives med en strømfunktion og den divergente vind, som udtrykkes ved et hastighedspotentiale. Disse størrelser er lettest at komme til ved at erstatte de to bevægelsesligninger med en vorticitetsligning og en divergensligning. De findes i (12).

$$\begin{aligned} f_0 \nabla^2 \chi + \epsilon \nabla^2 \psi &= 0 \\ -\nabla^2 \phi + f_0 \nabla^2 \psi - \epsilon \nabla^2 \chi &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Den første af disse ligninger kan bruges til at bestemme strømfunktionen. Når denne er kendt, kan den anden ligning i (12) bruges til at beregne geopotentialet, hvorefter man kan beregne de geostrofiske vindkomponenter, som så kan sammenlignes med den ikke-divergente og den divergente vindkomponenter. For at komme til et konkret tilfælde må vi vælge formen på den ydre påvirkning, d.v.s. $S = S(x, y)$. Det valgte eksempel er givet i (13).

$$\begin{aligned} S(x, y) &= S_0 \cos(kx) \cos(\mu y) \\ K &= \frac{2\pi}{L}; \mu = \frac{\pi}{D} \end{aligned} \quad (13)$$

Med dette enkle valg for $S(x, y)$ er det let at løse ligningerne for strømfunktionen, hastighedspotentialet og geopotentialet. Når disse størrelser er bestemt, kan man fra dem bestemme vindkomponenterne, som vi skal betegne med u_s og v_s for den ikke-divergente vind, u_p og v_p for de divergente komponenter og u_g og v_g for de geostrofiske vindkomponenter. Efter disse beregninger kan man bestemme forholdet mellem den geostrofiske vind og den ikke-divergente vind ligesom man kan beregne forholdet mellem den divergente og den ikke-divergente vind. Disse relationer findes i (14).

$$\begin{aligned} \frac{u_g}{u_s} = \frac{v_g}{v_s} &= 1 + \left(\frac{\epsilon}{f_0} \right)^2 \\ \frac{u_p}{v_s} &= -\frac{\epsilon}{f_0}; \frac{v_p}{u_s} = \frac{\epsilon}{f_0} \end{aligned} \quad (14)$$

Fra disse komponent forhold kan man let beregne længden af de forskellige vindvektorer. Når man anvender værdierne $\epsilon = 4.0 \times 10^{-6}$ og $f = 1.0 \times 10^{-4}$ finder man, at $V_g/V = 1.0008$, som viser en næsten perfekt geostrofiske tilpasning. På tilsvarende måde finder man, at forholdet mellem den divergente vind og den ikke-divergente vind er 0.04, som viser, hvor lille den divergente vind er sammenlignet med den ikke-divergente vind. Det er naturligvis klart, at den ydre påvirkning af systemet bestemmer størrelsen af de forskellige vindkomponenter, men i vores enkle eksempel har den ydre påvirkning ingen indflydelse på forholdet imellem komponenterne.

I de numeriske integrationer har vi set, at den geostrofiske tilpasning foregår langsommere i den sydlige del af området. Vi kan med fordel se på dette fænomen gennem en analyse af de to bevægelsesligninger under anvendelse af de sfæriske koordinater. Ligningerne er dette tilfælde vist i (15).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a \cos(\phi)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + 2\Omega \sin(\phi) - \epsilon u &= 0 \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + 2\Omega \sin(\phi)u - \epsilon v &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Ved at benytte definitionerne af de geostrofiske vindkomponenter og sætte $\mu = \sin(\phi)$ kan (15) også skrives på formen, som findes i (16).

$$\begin{aligned} v_g &= v - \frac{\epsilon}{2\Omega\mu}u \\ u_g &= u + \frac{\epsilon}{2\Omega\mu}v \end{aligned} \quad (16)$$

Vi ser først på størrelsen af de to vindvektorer, som er at finde i (17).

$$V_g = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4\Omega^2\mu^2}\right)^{1/2} V \quad (17)$$

Den sidste ligning siger, at den geostrofiske approximation bliver mere og mere unøjagtig jo lavere bredden er. Approximationen er udmærket i nærheden af Polerne, hvor μ er nær ved 1, men jo lavere bredde vi betragter des mindre er μ . For $\mu = 0.1$ (bredden = 5.7 grader) finder vi $V_g = 1.0370V$, medens $\mu = 0.01$ (bredden = 0.57 grader) giver $V_g = 2.92V$.

Afsluttende bemærkninger

Hovedformålet har været at give en ny og anderledes behandling af tilnærmelsen til geostrofisk ligevægt. I modsætning til andre behandlinger bruges en model med både ydre påvirkninger og dissipation, og det viser sig i den mest almindelige model, som tager hensyn til de ikke-lineære advektionsprocesser, at man er nær ved

geostrofisk ligevægt efter en integration svarende til 2-3 døgn. En fuldstændig geostrofisk ligevægt opnås, når integrationen gennemføres til en stationær tilstand. Den anvendte model bruges først til enkle formuleringer, som kun har een dimension i rummet i vest-øst eller syd-nord retningen. Senere anvendes modellen i to rumdimensioner.

I forrige afsnit findes en behandling af de lineære tilfælde under antagelse af en stationær tilstand. Medens en sådan analyse er ret let at gennemføre, bemærkes det, at analysen ikke er generel, fordi bidragene fra de ikke-lineære processer er udeladt.

Referencer:

- [1] C.-G. Rossby (1937 og 1938) "On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current systems, I, II", *Jour. of Marine Research*, bind 1, side 15-27 og side 239-263.
- [2] A. Cahn (1945) "An investigation of the free oscillations in a simple current system" *Jour. of Meteor.*, bind 2, side 113-119.
- [3] A. M. Obukhov (1949) "On the problem of geostrophic wind", *Edz. USSR Academy of Sciences, Ser. Geogr. and Geophys.*, bind 13, side 281-306.
- [4] B. Bolin (1953) "The adjustment of a nonbalanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid", *Tellus*, bind 5, side 373-385.
- [5] E. A. Kibel (1955) "On geostrophic adaptation of atmospheric motion", *Doklady USSR Academy of Sciences*, bind 106, nr. 1, side 60-63 (på russisk).
- [6] F. Winninghoff (1968) "On the adjustment toward geostrophic balance in a simple primitive equation model with application to the problem of initialization and objective analysis", *Ph. D. Diss., UCLA*, 161 pp.
- [7] W. Blumen (1972) "Geostrophic adjustment", *Rev. of Geophysics and Space Physics*, bind 10, nr. 2.
- [8] H. L. Kuo (1998) "A new perspective of geostrophic adjustment", *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, bind 27, side 413-437.
- [9] A. Wiin-Nielsen (1999) "Steady state and transient solutions of the nonlinear forced shallow water equations in one space dimension", *Atmósfera*, bind 12, nr. 3, side 145-159.
- [10] A. Wiin-Nielsen (2001) "A note on nonlinear aspects of large-scale atmospheric instabilities", *Atmósfera*, bind 14, nr. 2, side 53-68.



Aksel Wiin Nielsen er professor emeritus, Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Fysik, Astronomi og Geofysik.