

Konkurrence mellem tre grupper

Aksel Wiin Nielsen, *Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik.*

I en tidligere artikel [1] behandlede et specielt tilfælde af konkurrence mellem tre grupper for at give et eksempel på begrænset forudsigelighed i ikke-lineære systemer. Den udvalgte model egnede sig til formålet, men er nok ikke den mest realistiske model til andre anvendelser, fordi modellen ser bort fra den påvirkning af en gruppe, som kommer fra det direkte samarbejde mellem de to andre grupper. Dette ses tydeligt i de grundlæggende ligninger, hvor ligningen for tidsændringen af, for eksempel, x ikke indeholder et led af typen (yz) . Den almindelige opførsel af modellen anvendt i den tidligere artikel kan findes i Beltramis bog [2].

Formålet med dette bidrag er at undersøge en model, som lægger hovedvægten på den savnede mekanisme i de tidligere modeller. Forfatteren har ikke fundet en tidligere behandling af netop denne model.

Der er mange anvendelser af modellen. Den kan bruges til at undersøge konkurrencen mellem tre plante- eller dyrearter, som lever i det samme begrænsede område og har fælles ressourcer, og den er også egnet til at beskrive indvirkningen af tre firmaer på hverandre i konkurrencen om deres del af markedet, når firmaerne har de samme eller lignende produkter. Sådanne konkurrencer behøver ikke at være begrænsede til det kommercielle marked, fordi modellen kan lige så godt kan anvendes på tre forskningsgrupper, som arbejder på det samme område. Et emne kunne for eksempel være samarbejdet i Ørstedeprojektet mellem Danmarks Meteorologiske Institut, Geofysisk Afdeling på Niels Bohr Institutet og Rumforskningsinstitutet.

Modellen bygger på, at hver gruppe har en indre dynamik, som er bestemt af et tilskud og et frafald, som kan være i personale og/eller ressourcer. Hver gruppe har en optimal størrelse, som den ville have, hvis den eksisterede i isolation. Denne størrelse bruges i det følgende som en normeringsstørrelse, således at gruppens indflydelse måles ved et tal mellem 0 og 1. I almindelighed indvirker eksistensen og virksomheden af de to andre grupper på den betragtede gruppe i en negativ retning.

Modellerne

Den mest almindelige model for den konkurrence, som er beskrevet i indledningen, ville være det følgende

ligningssystem.

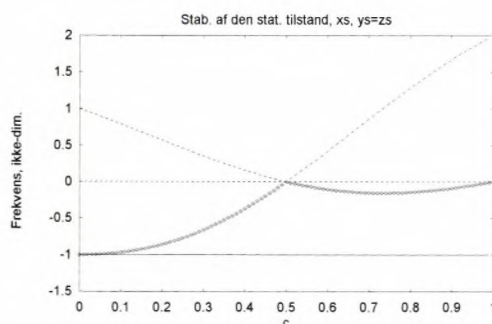
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x - a_1y - b_1z) - c_1yz \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 - y - a_2z - b_2x) - c_2zx \\ \frac{dz}{dt} &= z(1 - z - a_3x - b_3y) - c_3xy\end{aligned}\quad (1)$$

Den model, som i almindelighed er behandlet i litteraturen [3], indeholder ikke de led, som har koefficienterne c_1 , c_2 og c_3 . Den analytiske behandling bliver ret uoverskuelig, hvis man antager, at koefficienterne a_1 , a_2 og a_3 har forskellige numeriske værdier. Det samme gælder for koefficienterne b og c . Som vi skal se senere, kan sådanne antagelser have stor indflydelse på løsningernes almindelige opførsel.

I dette bidrag vil hovedvægten være på de bidrag, som kommer fra de påvirkninger, som indeholdes i de hidindtil udeladte led, som har koefficienterne c_1 , c_2 og c_3 . Ligningerne reduceres da til de følgende:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - c_1yz \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 - y) - c_2zx \\ \frac{dz}{dt} &= z(1 - z) - c_3xy\end{aligned}\quad (2)$$

Dette ligningssystem vil blive behandlet i det næste afsnit og belyst ved en række numeriske integrationer med hensyn til tiden. I dette afsnit skal vi se på det yderligere forenkledte system, hvor de tre koefficienter er lige store, d.v.s. $c_1 = c_2 = c_3 = c$.



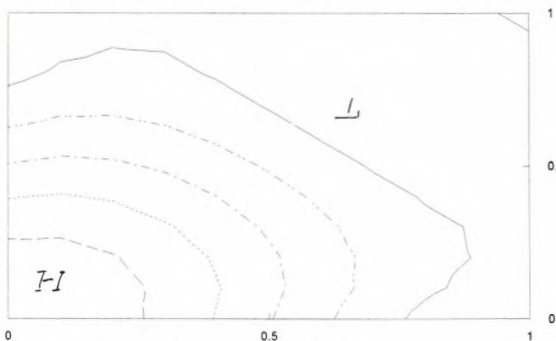
Figur 1. Frekvenserne som funktion af c , når x_s er forskellig fra $y_s = z_s$. Bemærk instabiliteten for alle c med undtagelse af $c = 1/2$.

Den normale strategi er først at finde de mulige stationære tilstande. Lidt aritmetik viser, at een af de stationære tilstande har samme værdi for de tre variable,

nemlig $1/(1+c)$. Dernæst søger man efter stationære tilstande, hvor kun to af de variable f.eks. y og z er ens. Lidt mere aritmetik giver værdierne $x_s = c/(1-c+c^2)$ og $y_s = z_s = (1-c)/(1-c+c^2)$. Der findes ingen stationære tilstand, hvor x_s , y_s og z_s har tre forskellige værdier.

Dernæst søger man at bestemme stabiliteten af de fundne stationære tilstande. Egenværdierne for den første stationære tilstand, hvor de tre variable har samme værdi, viser sig at være -1 og $(2c-1)/(c+1)$, hvor den sidste forekommer to gange. Det er da klart, at denne stationære tilstand er stabil, når $c < 1/2$ og ellers ustabil.

Bestemmelsen af egenværdierne for den anden stationære tilstand er lidt mere besværlig, og det viser sig, at det er mest praktisk at løse dette problem numerisk. Resultatet gives grafisk i figur 1. Den ene egenværdi er altid lig med -1 , svarende til stabilitet. Den anden egenværdi, angivet med punkter, er også negativ for alle værdier af c , men den tredje er positiv for alle værdier af c med undtagelse af $c = 1/2$. Denne stationære tilstand er derfor i almindelighed ustabil.



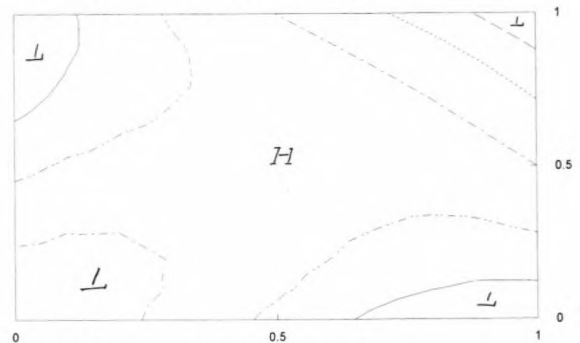
Figur 2. Isolinier for potential funktionen som funktion af x og y , når $z = 0.5$ og $c = 0.4$.

Disse resultater kan illustreres, fordi der i det specielle tilfælde, hvor c 'erne er lige store, findes en potential funktion. Man ser umiddelbart, at denne funktion er bestemt ved udtrykket givet i nedenstående ligning.

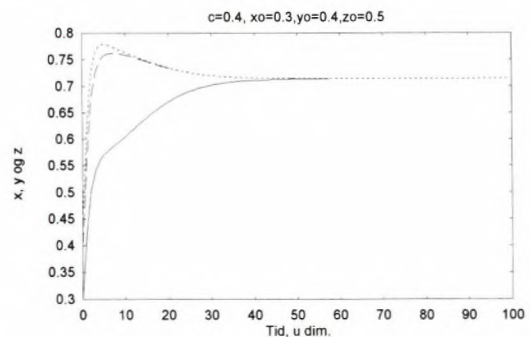
$$\phi = cxyz - (x^2 + y^2 + z^2)/2 + (x^3 + y^3 + z^3)/3 \quad (3)$$

Potential funktionen er vist i figur 2 for $c = 0.4$ og en konstant værdi af z , hvilket skulle svare til stabilitet af den stationære tilstand, hvor alle tre koordinater er $1/1.4 = 0.71$. Man ser, at et minimum findes i dette punkt. Figur 3 viser situationen for $c = 0.9$ svarende til en stationær tilstand med den fælles værdi på $1/1.9 = 0.53$. Som set på figuren er der et maksimum i dette punkt svarende til ustabilitet. Figur 4 viser en numerisk integration, hvor de forskellige grupper starter fra relativt små begyndelsesværdier med $c = 0.4$. Vi ser fra integrationen, at de alle ender på det samme niveau. Figur 3 viser også, at når man udfører en numerisk integration af ligningerne i det ustabile tilfælde, vil banekurven gå over kanten på enhedskvadratet, hvilket svarer

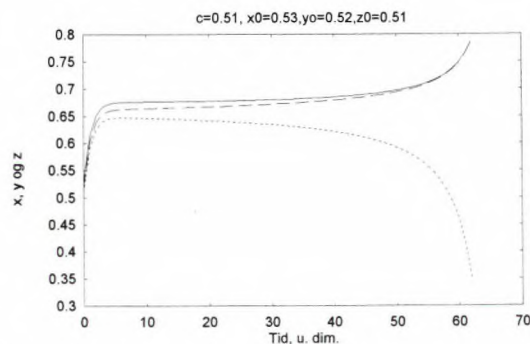
til at mindst een af grupperne er elimineret. Dette er illustreret i figur 5, hvor den numeriske integration er standset lige før een af grupperne er elimineret.



Figur 3. Som figur 2, men for $c = 0.9$.



Figur 4. De tre variable x , y og z som funktion af tiden for $c = 0.4$ og $x_0 = 0.3$, $y_0 = 0.4$ og $z_0 = 0.5$.



Figur 5. x , y og z som funktion af tiden for $c = 0.51$, $x_0 = 0.53$, $y_0 = 0.52$ and $z_0 = 0.51$.

De ovenstående eksempler er i overensstemmelse med analysen, som viser, at for $c < 1/2$ er der kun een stabil stationær tilstand, hvor de asymptotiske værdier er lige store, medens alle stationære løsninger er ustabile, hvis $c > 1/2$.

Specielle tilfælde

Stabilitetsanalysen forudsætter, at de små afvigelser fra den stationære tilstand er vilkårlige. Man skal derfor, som vi har gjort, starte fra en tilstand, hvor værdierne på de tre variable er forskellige. Hvis man ikke gør dette, kan systemet opføre sig på en helt anden måde. Figur 6 viser et eksempel, hvor begyndelsesværdierne alle er

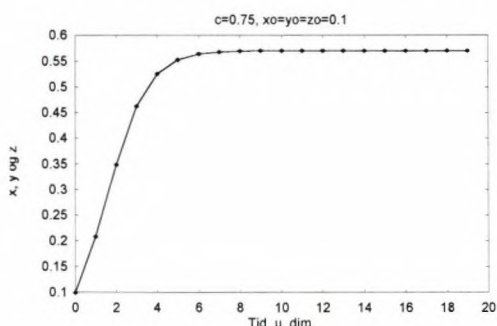
0.1, medens $c = 0.75$. Som man kan se fra figuren, er der en stabil tilstand, selv om stabilitetsanalysen kræver instabilitet. Årsagen er, at når $x_0 = y_0 = z_0$ er alle tre ligninger identiske, hvilket giver identiske nye værdier for hvert tidsskridt. De tre ligninger er derfor reduceret til kun een ligning, som er givet i (4).

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - cx^2 \quad (4)$$

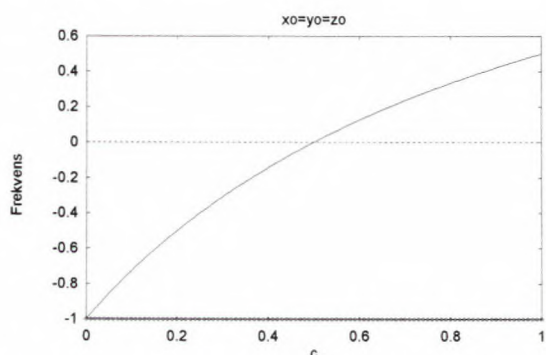
Ligning (4) kan integreres numerisk, men den kan også løses ved elementære metoder. Løsningen er angivet i ligning (5).

$$x = \frac{x_0}{[1 + (1 + c)x_0]e^{-t} + (1 + c)x_0} \quad (5)$$

Det ses da umiddelbart, at den asymptotiske løsning er $1/(1 + c)$. Disse overvejelser bekræftes af figur 6. Med hensyn til stabiliteten af denne ene stationære tilstand kan man umiddelbart løse frekvensligningen. Resultatet kan ses på figur 7, som viser, at der altid er en frekvens på -1 (stabil) og en anden frekvens, som bliver positiv, når $c > 1/2$.



Figur 6. x , y og z som funktion af tiden for $c = 0.75$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0.1$.

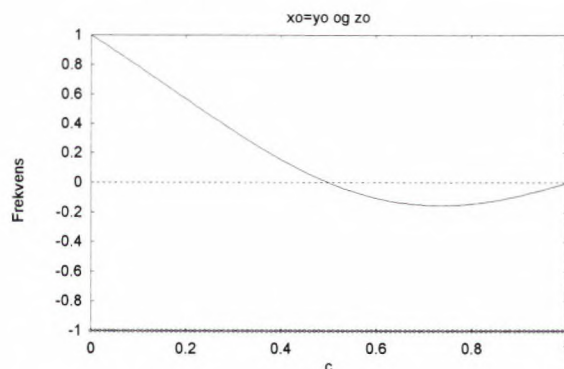


Figur 7. Frekvensen som funktion af c , når $x_0 = y_0 = z_0$. Bemærk instabiliteten for $c > 1/2$.

Et andet specialtilfælde indtræffer, når man vælger en begyndelsestilstand, hvor to af værdierne er ens. Også i dette tilfælde får man nye resultater, fordi man fjerner en frihedsgrad fra systemet, og der vil da kun være to uafhængige ligninger tilbage. Vi kan se på tilfældet, hvor $x_0 = y_0$, medens z_0 er forskellig fra disse værdier. Da de to første ligninger i dette tilfælde bliver

identiske, får man et system af kun to ligninger. Disse ligninger er givet i ligning (6).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - cxz \\ \frac{dz}{dt} &= z(1 - z) - cx^2 \end{aligned} \quad (6)$$

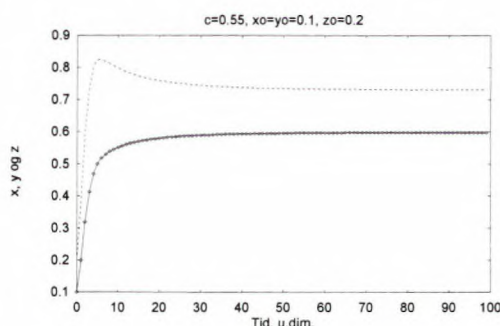


Figur 8. Frekvensen som funktion af c , når $x_0 = y_0$. Her er instabiliteten for $c < 1/2$.

De stationære tilstande kan umiddelbart beregnes, og de er angivet i ligning (7).

$$\begin{aligned} x_{1s} &= \frac{1}{1 + c} = z_{1s} \\ x_{2s} &= \frac{1 - c}{1 - c + c^2} \\ z_{2s} &= \frac{c}{1 - c + c^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Stabiliteten er blevet beregnet, som en funktion af parameteren c . Resultatet ses i figur 8, som viser, at instabilitet er til stede for $c < 1/2$ og stabilitet for $c > 1/2$. Figur 9 viser resultatet af en numerisk integration for værdien $c = 0.55$, som ligger i det stabile område. Endelig viser figur 10 et tilfælde, hvor begyndelsestilstanden er den samme som i figur 9, men hvor $c = 0.45$. Da den eneste stabile tilstand i dette tilfælde er den, hvor alle tre værdier er ens, kommer man asymptotisk til den efter den numeriske integration og den fælles værdi er da lig med $1/(1 + c) = 0.69$.

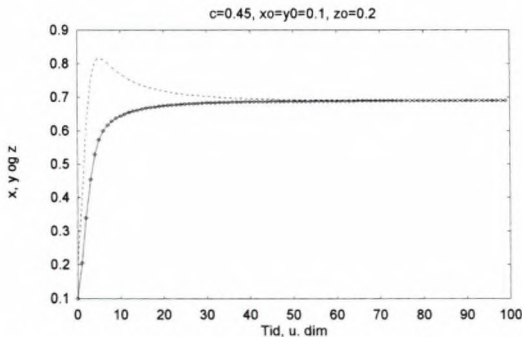


Figur 9. x , y og z som funktion af tiden for $c = 0.55$, $x_0 = y_0 = 0.1$ og $z_0 = 0.2$.

En mere almindelig model

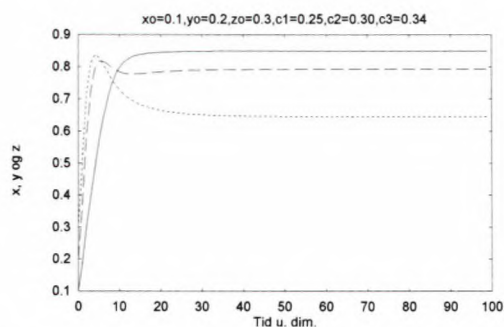
Den mest almindelige formulering i denne klasse af modeller er givet i ligning (1). I denne sektion skal vi undersøge en model, som er mere realistisk end den, som er behandlet i afsnit 2 og 3, idet man tillader forskellige koefficienter i de tre ligninger. Ligninger bliver da som angivet i (8).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - c_1 yz \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) - c_2 zx \\ \frac{dz}{dt} &= z(1-z) - c_3 xy \end{aligned} \quad (8)$$



Figur 10. x , y og z som funktion af tiden for $c = 0.45$, $x_0 = y_0 = 0.1$ og $z_0 = 0.2$.

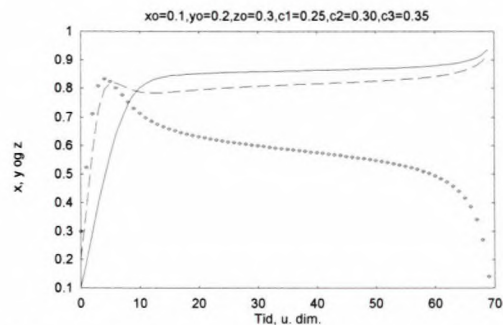
Denne uskyldigt udseende ændring i model-ligningerne har væsentlige ændringer i resultaterne. Der er f.eks. ikke længere en potentialfunktion. En bestemmelse af de mulige stationære tilstande bliver besværlig, og det samme gælder stabilitetsundersøgelser. Det er derfor mere nyttigt at behandle disse ligninger ved hjælp af numeriske integrationer, selv om man må udføre et stort antal af disse for at få et overblik over modellens opførsel.



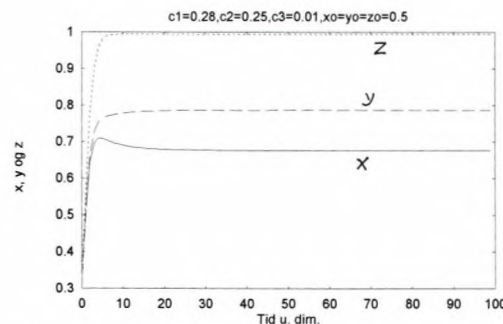
Figur 11. x , y og z som funktion af tiden for $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.2$, $z_0 = 0.3$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.30$, $c_3 = 0.34$.

Med erfaringerne fra den enklere model må man antage, at jo større den numeriske værdi er af koefficienten c_n for en given gruppe des større er muligheden for, at denne gruppe reduceres væsentligt eller bliver helt elimineret. Dette kan demonstreres med numeriske integrationer. Det antages, at grupperne ved begyn-

delsestidspunktet har værdierne $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.2$ og $z_0 = 0.3$, således at den tredje gruppe er den største. Det antages også, at $c_1 = 0.25$ og $c_2 = 0.30$. Man kan da spørge: Hvor store værdier af c_3 tillader modellen, hvis gruppe tre skal overleve? Figur 11 viser et tilfælde med $c_3 = 0.34$. Man kommer til en stationær tilstand, hvor z -værdien er den laveste, fordi den er påvirket af en c -værdi, som er større end de to andre. Figur 12 har $c_3 = 0.35$, og man er da nået til en værdi, hvor kurven for z -værdien går hurtigt nedad for at passere nulværdien efter et par tidsskridt. Fortolkningen er, at hvis samarbejdet mellem x - og y -gruppen er tilstrækkeligt effektivt, er de trods deres lave begyndelsessituation i stand til at udslette z -gruppen. Man kan dernæst spørge om begyndelsesværdien for z -gruppen har nogen indflydelse på dens overlevelse. De numeriske eksperimenter viser, at dette ikke er tilfældet for de valgte c -værdier. Man må derfor konkludere, at den asymptotiske stationære tilstand, som ses i figur 11, bliver ustabil, når c_3 overskrider tærskelværdien, som ligger mellem 0.34 og 0.35 i det valgte eksempel.



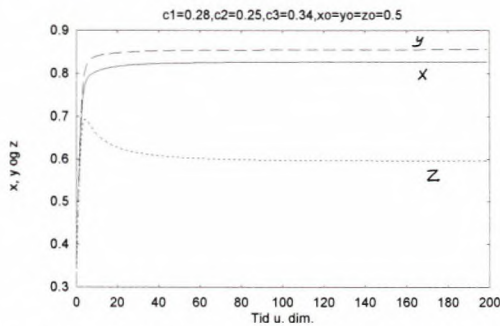
Figur 12. Samme værdier som i figur 12 med undtagelsen, at $c_3 = 0.35$.



Figur 13. En integration med $c_1 = 0.28$, $c_2 = 0.25$, $c_3 = 0.01$ med $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5$.

Et sidste tilfælde vil blive illustreret med to forskellige figurer. I denne serie af eksperimenter er $c_1 = 0.28$ og $c_2 = 0.25$. Alle integrationer starter fra $x_0 = y_0 = z_0 = 0.5$. Det første eksperiment har $c_3 = 0.01$ og er illustreret i figur 13. Den meget lille værdi på c_3 forårsager, at z i meget stor udstrækning er bestemt af den indre dynamik, som ville give $z = 1$, hvis c_3 var lig med 0. Nu får vi en værdi, som er ca. 0.99. Trods denne ekstreme tilstand for den tredje gruppe klarer

de to andre grupper sig relativt godt, hvilket kan ses fra værdierne på x og y . Dernæst tager vi den størst mulige værdi, hvilket er $c_3 = 0.34$. Hvis $c_3 = 0.35$, får man instabilitet. Figur 14 viser, at i dette tilfælde er slutværdien for z lig med 0.6, medens x og y antager ret store værdier mellem 0.8 og 0.9.



Figur 14. Samme værdier som i figur 13 med undtagelse af $c_3 = 0.34$.

Afsluttende bemærkninger

Modeller af den type, som er behandlet her, finder anvendelse i botanik, zoologi og økologi. De kan også bruges på flere industrielle områder og i mere almindelige konkurrencesituationer. Selv om litteraturen [3] som regel behandler konkurrence mellem to eller tre grupper, fordi man lettere kan analysere modellens opførsel i disse tilfælde, er der intet, som forhindrer en udvidelse til konkurrence mellem mere end tre grupper. Ligningerne, som er angivet i ligning (1), kan behandles

ved hjælp af numeriske integrationer. Det vanskelige spørgsmål i sådanne undersøgelser er bestemmelsen af værdien på koefficienter, hvis antal hurtigt vokser, når man ønsker at behandle tilfælde med mange konkurrerende grupper.

Referencer:

- [1] A. Wiin-Nielsen (1998) "Begrænset forudsigelighed", *Kvant*, bind 9, nr. 3, (November), side 21–25.
- [2] E. Beltrami (1987) "Mathematics for dynamic modeling", *Academic Press*, 277 sider.
- [3] R. M. May (Red.) (1976) "Theoretical Ecology, Principles and Applications", *Blackwell Scientific Publications*, 317 sider.



Aksel Wiin-Nielsen er professor emeritus, Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik.

Boganmeldelse: "Universet"

Christine Pepke Pedersen, 5d, Lillerød Skole.

Bogen er skrevet til "natur og teknik" i 5. og 6. klasse. Den handler om universet, planeterne, stjernerne, galakserne, asteroider og en masse andre ting. I bogen er der en masse flotte billeder af stjerner, planeter og asteroider, og der står en masse om årstider, månen og månens faser, liv andre steder, mælkevejen og andre galakser. I et af afsnittene om solen er der et billede af solen og en solstråle, som ligner en ildstråle der blæser ud af en skorsten. Bogen er god, men nogle ting er lidt svære at forstå, når man går i 5. klasse.

Der er også en figur med en astronom, der hedder Jørgen, som fortæller om astronomi og sit arbejde på mange af siderne. Jørgen er så skør, at jeg ikke tror på, at han findes i virkeligheden. Jeg synes det er sjovt at man kan forudsige de næste måne- og solformørkelser,

og at der på min 14 års fødselsdag i 2003 vil komme en solformørkelse.

Der er også nogle opgaver man kan lave. F.eks. er der et solur. Det har jeg godt nok ikke prøvet, men det ser spændende ud. Der er også nogle huskeregler, så man kan huske planeterne i den rigtige rækkefølge, men det kunne jeg nu godt i forvejen. Det undrer mig, at på billedet af planeten Venus har den en flot blå farve. Jeg troede, at den var orange, men der står ikke, hvorfor er den blå.

Jeg synes, at bogen skal have 4 stjerner ud af 5 stjerner.

"Universet", af Camilla Bacher, i serien "Naturlig Viis", 44 sider, 175 kr., Geografforlaget (www.geografforlaget.dk)