

# Begrænset forudsigelighed

Aksel Wiin Nielsen, *Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik*

## Indledning

Mange ikke-lineære systemer udviser stor følsomhed for små ændringer i begyndelsestilstanden. En lille ændring i enten begyndelsestilstanden eller i den ydre påvirkning af systemet kan medføre store ændringer i tidsforløbet af to numeriske integrationer af de ikke-lineære ligninger. Et system, som opfører sig på denne måde, kaldes kaotisk. Der er masser af eksempler på sådanne processer. For geofysikere er den begrænsede forudsigelighed af atmosfæren vel den mest kendte. Når vejrforudsigelser er begrænset til ca. en uge, skyldes det bl.a., at man ikke kan undgå en forskel mellem atmosfærens virkelige tilstand og begyndelsestilstanden for modellen, fordi der er langt mellem observationerne af atmosfæren, og fordi alle observationer er behæftet med fejl. En anden begrænsende årsag er den tilnærmede beskrivelse af de fysiske processer i atmosfæren. Disse processer er i virkeligheden molekulære, men beskrives i modellen i punkter, som er nogle kilometer fra hianden.

Adskillige eksempler på enkle kaotiske systemer såsom Feigenbaum's ligning [1] og Lorenz' simplificerede model for konvektion [2] er offentliggjort, se f.eks. [3,4], hvor disse eksempler er analyseret. Forskellen mellem de to løsninger kan f.eks. vises gennem en beregning af rms-forskellen som en funktion af tiden.

Formålet med denne artikel er at give endnu et eksempel hentet fra en klasse af modeller, som beskriver konkurrencen mellem to eller flere grupper. En sådan konkurrence mellem to grupper er beskrevet i enkeltheder af R.M. May [5]. Den naturlige udvidelse er til en konkurrence mellem tre grupper, men det viser sig, at så snart man kommer til det tre- eller fler-dimensionale parameterrum, så er de (numeriske) løsninger af en sådan rigdom, at man får mange nye og ejendommelige opførsler [6]. Som May [5] skriver: "Det er af denne grund, at vi tæller ligesom den australske Arunta stamme: en, to, mange".

## En konkurrence model med tre grupper

En lidt forenklet model af konkurrence mellem tre grupper er beskrevet af Beltrami [7]. Grupperne kaldes 1, 2 og 3. De tre variable for antallet af medlemmer i de tre grupper betegnes med  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Disse variable er uden dimension og normaliseret til at være mellem 0 og 1. Det antages, at de tre grupper har samme fødselsrate (første led på højre side i de efterfølgende ligninger) og også samme dødelighed (andet led). En given gruppe er påvirket af aktiviteterne i de andre to grupper. Også her er modellen forenklet, idet det an-

tages, at raten for gruppe 1's påvirkning af gruppe 2, benævnt  $a$ , er den samme som gruppe 3's indflydelse på gruppe 2 og for gruppe 1's påvirkning af gruppe 3 (tredje led). En tilsvarende antagelse, men med en anden talværdi  $b$ , gælder for påvirkningen af gruppe 3 på gruppe 1, gruppe 1 på gruppe 2 og gruppe 2 på gruppe 3 (fjerde led).

Med disse antagelser kan man skrive de tre ligninger for modellen således:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x - ay - bz) \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 - y - az - bx) \\ \frac{dz}{dt} &= z(1 - z - ax - by)\end{aligned}\quad (1)$$

Antagelser, som indgår i modellen, kan meget vel mene, at der er mindre rigdom i løsningernes opførsel end den mere almindelige model. Ligningerne har forskellige stationære tilstande, som kan undersøges for stabilitet på den sædvanlige måde ved at udføre en perturbationsanalyse. Resultaterne kan beskrives på følgende måde:

1. (0,0,0) er et stationært punkt for  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Dette stationære punkt er altid ustabil.

2. (0,0,1), (0,1,0) og (1,0,0) er stationære tilstande. De tre egenverdier er i alle tre tilfælde de samme, nemlig  $-1$ ,  $(1-a)$  og  $(1-b)$ . Instabilitet indtræffer derfor, når enten  $a$  eller  $b$  er mindre end 1, medens stabilitet er tilfældet, hvis både  $a$  og  $b$  er større end 1.

3. Man kan også finde stationære tilstande, hvor kun  $n$  af de variable er lig med 0. Her ser vi kun på  $n$  af disse tilstande, hvor  $x_s = 0$ . De andre to variable har da værdierne angivet i (2).

$$\begin{aligned}y_s &= \frac{1-a}{1-ab} \\ z_s &= \frac{1-b}{1-ab}\end{aligned}\quad (2)$$

Da de variable måler antallet af medlemmer i de tre grupper, skal de være positive. Det følger derfor, at enten er  $a < 1$  og  $b < 1$  eller  $a > 1$  og  $b > 1$ . I det første tilfælde finder man instabilitet, medens den anden mulighed giver stabilitet.

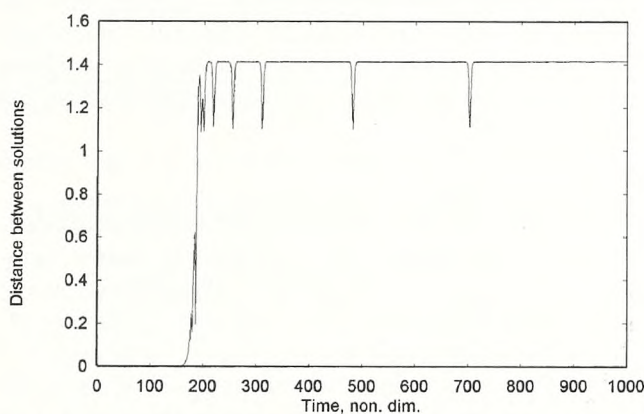
4. Endelig er der det generelle tilfælde, hvor alle tre værdier er forskellige fra nul. I dette tilfælde finder man, at de tre grupper indeholder lige mange medlemmer. Den stationære tilstand er:

$$x_s = y_s = z_s = \frac{1}{1+a+b}\quad (3)$$

Også i dette tilfælde kan man gennemføre stabilitetsundersøgelsen, selv om den kræver noget mere regnearbejde. Egenverdierne bliver som angivet i (4)

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -1 \\ \nu_{2,3} &= \frac{a+b-2}{2(1+a+b)} \pm i3^{1/2} \frac{a-b}{2(1+a+b)} \quad (4) \end{aligned}$$

Man ser, at instabilitet indtræffer, når  $a+b > 2$ . Denne betingelse opfylder vi i de følgende eksempler ved at vælge  $a < 1$  og  $b > 1$ . Det betyder, at de stationære tilstand angivet under punkt 2 ovenfor er ustabile, medens de stationære tilstande under punkt 3 slet ikke eksisterer. Vi har derfor kun ustabile stationære med dette valg, og det skulle føre til, at systemet aldrig kommer i ro, hvis man baserer sin argumentation på resultaterne af perturbationsanalysen. Det skal man imidlertid være forsigtig med, som de følgende resultater vil vise. Den egentlige årsag til denne situation synes at være, at vi normalt ikke kan få analytiske løsninger til et sæt af ikke-lineære ligninger. De numeriske løsninger vil altid være behæftet med en vis fejl, som naturligvis afhænger af, hvilket system man anvender til integrationen.



Figur 1a. Afstand mellem to løsninger som funktion af tiden for de værdier, som er angivet over figuren. De samme værdier gælder for Figur 1b-1e.

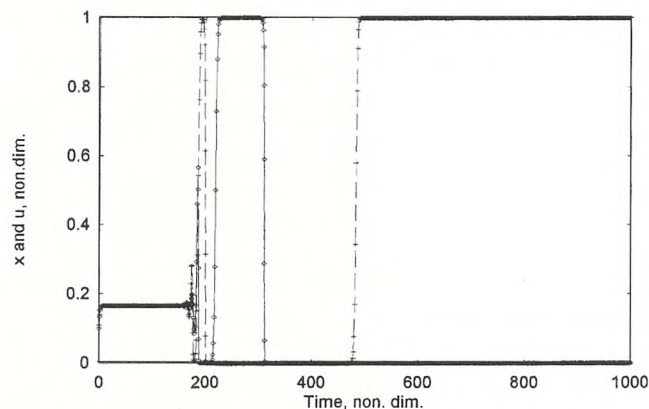
Af hensyn til fortolkningen af de senere eksperimenter er det nødvendigt at se på et specielt tilfælde. Hvis  $x=y=z$  for  $t=0$  bliver højresiderne identiske i alle tre ligninger. Det er derfor tilstrækkeligt at se på  $n$  af dem, som får formen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - \gamma x) \\ \gamma &= 1 + a + b \quad (5) \end{aligned}$$

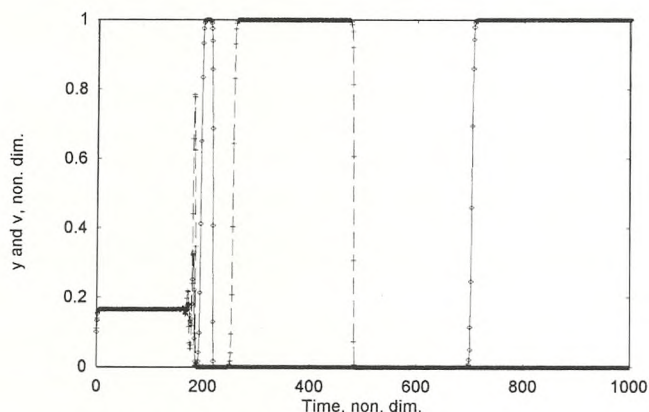
Denne ligning kan løses direkte. Med  $x=x_0$  for  $t=0$  finder man løsningen:

$$x = \frac{\frac{x_0}{1-\gamma x_0}}{e^{-t} + \gamma \frac{x_0}{1-\gamma x_0}} \quad (6)$$

Det ses således, at for denne specielle begyndelsestilstand er den asymptotiske værdi  $1/\gamma$  (eller med andre ord den "indre" stationære tilstand. Hvis  $a$  og  $b$  er sådan, at den stationære tilstand er stabil, ender integrationen i dette punkt, men hvis den er ustabil, vil der ske andre ting.



Figur 1b. Værdierne af  $x$  og  $u$  som funktion af tiden.



Figur 1c. Værdierne af  $y$  og  $v$  som funktion af tiden.

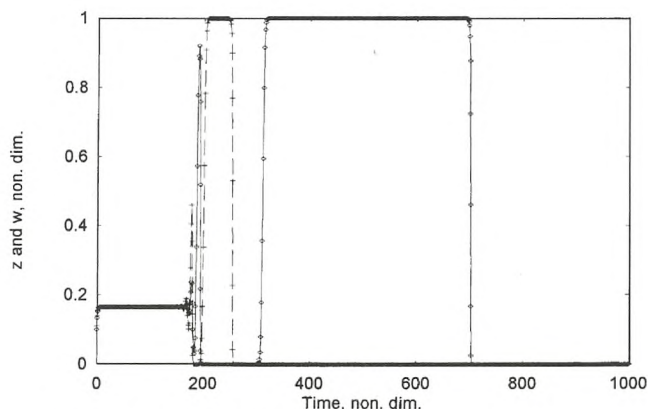
### To numeriske eksempler

Formålet med de numeriske eksempler er at vise følsomheden for små ændringer i begyndelsestilstanden i det første tilfælde og for små ændringer i konstanterne  $a$  og  $b$  i det andet tilfælde. Strategien i disse eksempler er at fremstille to lange integrationer fra f.eks. to lidt forskellige begyndelsestilstande. Dette gøres i det samme program, så man løbende kan holde øje med forskellen i de to integrationer. I den ene integration hedder de afhængige variable  $(x,y,z)$ , i den anden  $(u,v,w)$ , medens konstanterne hedder  $a,b$  i den ene og  $(a_1,b_1)$  i den anden. Integrationerne kan sammenlignes på forskellig måde. Man kan f.eks. måle forskellen mellem dem ved at udregne rms-forskellen defineret ved

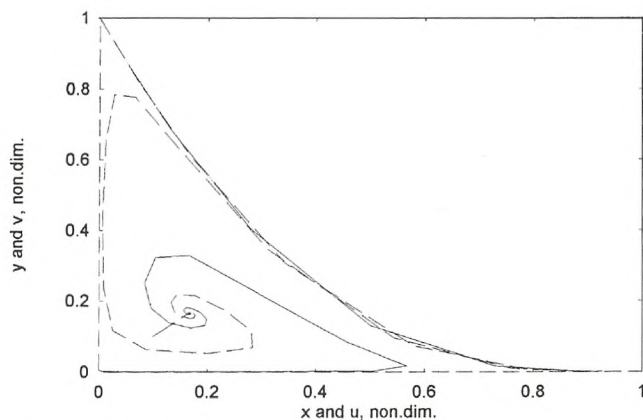
$$d = ((x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2)^{1/2} \quad (7)$$

Man kan også plotte  $x(t)$  og  $u(t)$  som funktion af tiden og tilsvarende figurer for de andre variable.

Integrationerne er udført med et af de mange Runge-Kutta systemer, den såkaldte Heun's procedure, men resultaterne er efterprøvet ved at anvende andre Runge-Kutta systemer på det samme eksempel med resultater, som ikke er de samme for forskellige systemer, men som ikke ændrer på hovedkonklusionerne.



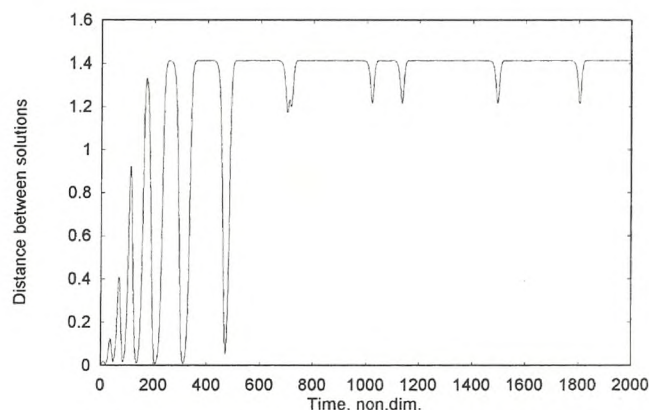
Figur 1d. Værdierne af z og w som funktion af tiden.



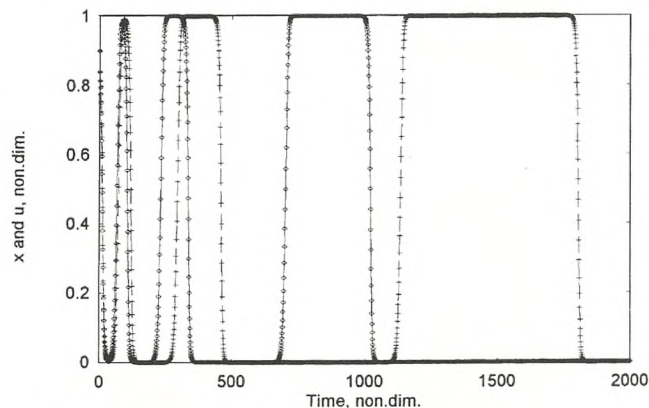
Figur 1e. Banekurverne for  $(x,y)$  og  $(u,v)$ .

I det første eksempel bruges  $a=a_1=0.1$  og  $b=b_1=4.9$  og  $x=y=z=0.1$  og  $u=v=w=0.11$ . Begge begyndelsestilstande hører til den særlige klasse, hvor alle tre variable er ens. Vi forventer derfor, at systemet i første omgang skal bevæge sig mod den 'indre' stationære tilstand, men da denne er ustabil for de valgte parametre eftersom  $a+b=a_1+b_1 > 2$  skulle systemet igen forlade dette punkt. Figur 1a viser rms-forskellen mellem de to løsninger. Denne kurve viser, at forskellen for de første 170 tidsenheder er nul, hvorefter den ret hurtigt vokser til større værdier. Forskellen bliver efterhånden til en - for det meste konstant - værdi på 1,41. Fra tid til anden er der en kort afvigelse, men tidsforskellen mellem dem bliver større og større. Hvordan kan vi beskrive disse resultater? Figur 1b viser kurverne  $x(t)$  og  $u(t)$  angivet med forskellige symboler. For at følge forløbet er det

lettest at følge de tykke linier, hvor systemet befinder sig i 0 eller 1. Hvis begge tykke linier er på samme sted er systemerne tæt ved hinanden. Hvis derimod den ene tykke linie er tæt ved 1 og den anden tæt ved 0 er integrationerne meget forskellige i dette tidsinterval. I dette eksempel ender den ene i værdien 1, den anden i 0. En nærmere undersøgelse viser at  $x = 0$  og  $u = 1$ . Figur 1c viser tilsvarende, at  $y = 1$  er den asymptotiske værdi for denne variable, medens den samme værdi for  $v$  er 0. Endelig viser Figur 1d, at de to variable  $z$  og  $w$  begge ender i værdien 0.  $(x,y,z)$  trajektorien ender derfor i  $(0,1,0)$ , medens  $(u,v,w)$  ender i  $(1,0,0)$ . Rms-forskellen mellem disse to punkter er  $2^{1/2} = 1,41\dots$



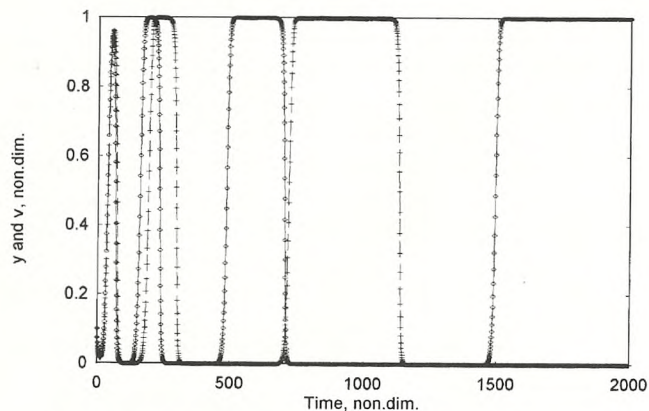
Figur 2a. Afstand mellem de to løsninger med samme begyndelsestilstand, men små ændringer i konstanterne a og b. Samme værdier er anvendt i Figur 2b-2e.



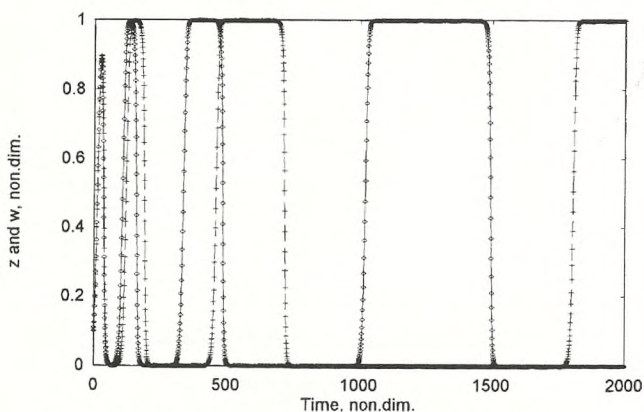
Figur 2b. Værdierne af x og u som funktion af tiden.

For at få yderligere information om systemets opførsel kan vi se på Figur 1e, som er trajektorierne af punkterne  $(x,y)$  og  $(u,v)$ . Vi ser, at begge trajektorier kommer meget nær til det stationære punkt  $1/(1+a+b) = 0,17$ . De forlader begge dette punkt, men i forskellige spiraler. Den ene kurve ender i  $(0,1)$ , den anden  $(1,0)$ . Men disse stationære tilstande var ustabile. Hvordan kan de så være de asymptotiske tilstande? For det første viser ustabiliteten sig under integrationen, fordi trajektorien drejer bort fra den ustabile tilstand i de første par

omdrejninger. Hver gang kommer trajektorien nærmere til det ustabile punkt og opholder sig dr i længere tid. Denne opførsel kan man forstå ved følgende argument. Betragt vi f.eks. punktet (1,0,0) så vil  $y$  og  $z$  være ganske små, så den væsentlige del i den første lignings højre side vil være  $x(1-x)$ , men da  $x$  er nær ved 1, vil dette led også være lille. Derfor bliver  $dx/dt$  lille. De samme argumenter anvendt på de andre to ligninger viser, at også i disse ligninger er højresiderne ganske små. Da vi ikke kan integrere ligningerne for en uendelig lang tid, vil det derfor være helt tilfældigt om de to trajektorier er i nærheden af samme punkt eller to forskellige punkter.



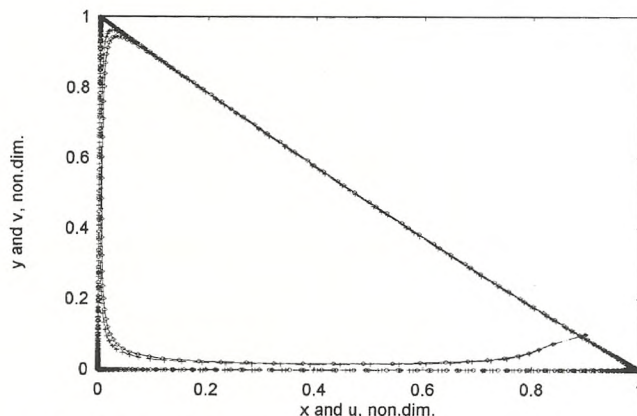
Figur 2c. Værdierne af  $y$  og  $v$  som funktion af tiden.



Figur 2d. Værdierne af  $z$  og  $w$  som funktion af tiden.

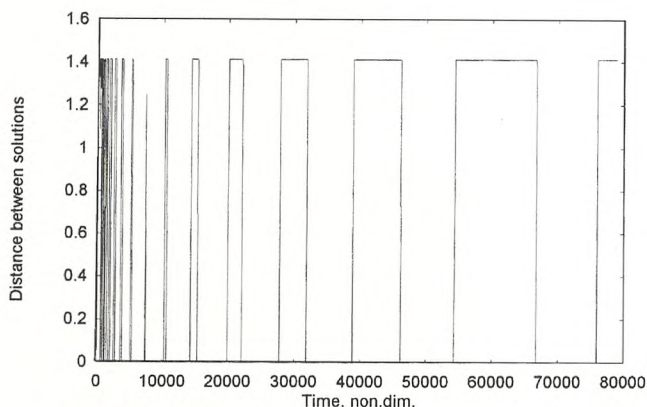
I det andet eksempel skal vi se på følsomheden, når vi starter fra samme begyndelsestilstand, men sammenligner to integrationer med små forskelle i konstanterne  $a$  og  $b$ . Eksperimentet bruger  $a=0,8$ ,  $b=1,3$  i den ene integration og  $a_1=0,81$ ,  $b_1=1,31$  i den anden. Den fælles begyndelsestilstand er:  $x=u=0,9$ ,  $y=z=v=w=0,1$ . Figur 2a viser afstanden mellem de to tilstande som funktion af tiden. Man ser, at denne kurve er af samme natur som den i Figur 1a, idet afstanden efter et stykke

tid er 1,41 for det meste af forløbet med relativt korte afvigelser fra den konstante værdi. I Figur 2b ser vi, at  $x$  og  $u$  begge slutter med at være nul, medens Figur 2c og 2d viser, at  $y$  og  $v$  ligesom  $z$  og  $w$  har den ene variable lig med 1 og den anden med 0. Endelig viser Figur 2e, at man også i dette tilfælde kan se de første omløb ganske klart, hvorefter trajektorien opfører sig på lignende måde som i det første eksempel. Integrationerne viser derfor samme slags følsomhed overfor små ændringer i værdierne for ligningernes konstanter som for små ændringer i begyndelsestilstanden.



Figur 2e. Banekurverne for  $(x,y)$  og  $(u,v)$ .

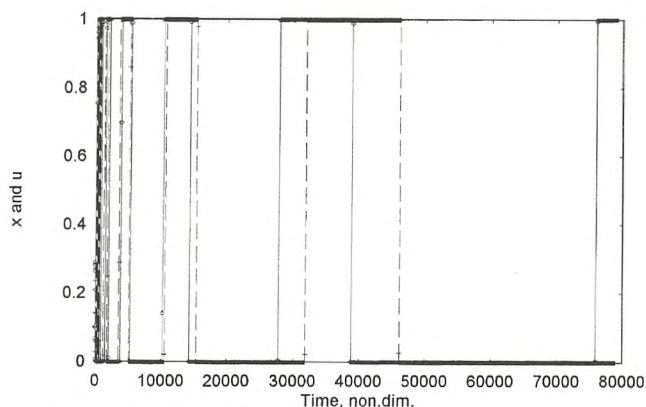
Endeligt skal det bemærkes, at alle beregningerne, som fører til figurene i denne artikel, er udført med den størst mulige nøjagtighed svarende til 19 til 20 signifikante cifre i hvert tal. Anvender man mindre nøjagtighed, får man helt andre resultater.



Figur 3a. Afstand mellem de to integrationer med samme begyndelsestilstand, men små forskelle mellem  $(a,b)$  og  $(a_1,b_1)$ .

Man kan spørge om systemet faktisk ender i  $t$  af de tre punkter:  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  og bliver dr. For at få svar på dette spørgsmål er en meget lang integration blevet fremstillet. I den ene er  $(a,b)=(0,5;1,7)$ , medens

den anden integration har  $(a_1, b_1) = (0,51; 1,71)$ . Startpositionen er i begge integrationer  $(0,1; 0,11; 0,1)$ . Figur 3a, som viser rms-værdierne for afstanden mellem de to løsninger, viser for det første, at under hele integrationen synes afstanden at variere mellem en situation, hvor de to integrationer er meget nær ved hinanden, og en anden, hvor de er 1,41 fra hinanden. Tidsintervallet, hvor de to løsninger er nær ved hinanden øger med integrationstiden, men det er også tilfældet med længden af de tidsrum, hvor de opholder sig i hvert sit hjørne punkt. Dette ses også fra Figur 3b, hvor både  $x$  og  $u$  er plottet som funktion af tiden. Systemet kommer derfor aldrig i ro. Det ser kun sådan ud.



Figur 3b. Værdierne for  $x$  og  $u$  som funktion af tiden.

### Afsluttende bemærkninger

Begrebet 'begrænset forudsigelighed', som først blev opdaget af H. Poincaré [8,9] i 1890'erne i forbindelse med et forsøg på en numerisk integration af ligningerne for tre-legeme problemet, blev genopdaget af Thompson [10] i forbindelse med numeriske vejrprognoser og af Lorenz [2], som brugte en 3-component model af konvektion mellem to vandrette plader, som hver for sig blev holdt på en konstant temperatur med temperaturen af den nedre plade større end temperaturen på den øvre. Siden da har man observeret fænomenet i mange tilfælde i forskellige områder i fysikken, kemien, biologien, økonomien og flere andre områder, hvor numeriske modeller står til rådighed. Fænomenet sætter en grænse for, hvad der kan forudsiges, og hvor langt ind i fremtiden man kan producere prognoser af praktisk værdi. Disse grænser kan ikke bestemmes på forhånd, men må fastlægges ved numeriske eksperimenter, hvor man har gode data at sammenligne med. Disse grænser for forudsigelighed er ikke udført i så mange tilfælde.

Det specielle eksempel, som er anvendt her til at illustrere begrænset forudsigelighed, tilhører en klasse,

hvor man har udført sådanne eksperimenter ved at sammenligne observationer af f.eks. forskellige dyre- og fuglearter, som lever i det samme område og derfor også er afhængige af den samme fødemængde [5].

### Referencer:

- [1] M. Feigenbaum (1978) Quantitative universality for a class of nonlinear equations, *J. of Stat. Physics*, bind 19, side 25-52.
- [2] E. N. Lorenz (1963) The predictability of hydrodynamic flow, *Transactions, New York Academy of Science, Serie II*, bind 25, side 409.
- [3] A. Wiin Nielsen (1997) Begrænset forudsigelighed I, *Vejret*, bind 2, side 27-35.
- [4] A. Wiin Nielsen (1997) Begrænset forudsigelighed II, *Vejret*, bind 4, side 11-17.
- [5] R. M. May (Editor) (1976) *Theoretical Ecology, Principles and Applications*, Blackwell Scientific Publications, 317 pp.
- [6] R. M. May og W. J. Leonard (1975) Nonlinear aspects of competition between three species, *SIAM, Journal of Applied Mathematics*, bind 29, side 243-253.
- [7] E. Beltrami (1987) *Mathematics for dynamic modeling*, Academic Press, Inc., 277 pp.
- [8] H. Poincaré (1893) *Les Méthodes nouvelle de la mécanique celeste*, Paris, Gauthiers-Villar.
- [9] H. Poincaré (1912) *Science et Méthode*, Paris, Flammarion.
- [10] P. D. Thompson (1957) Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns, *Tellus*, bind IX, side 275-295.



Aksel Wiin Nielsen er professor emeritus, Geofysisk Afdeling, Niels Bohr Institutet for Fysik, Astronomi og Geofysik.