

**Figur 3.** Neutron-data fra  $\text{Cu}(\text{DCOO})_2 \cdot 4\text{D}_2\text{O}$  for  $T \ll T_N$  (N. B. Christensen, H. M. Rønnow et al., ikke publiceret). a) Illustration af dispersions-relationen  $E(\mathbf{Q})$ . b)-c) Intensitet for konstante energier 9 meV og 14,5 meV. Figur c) afslører manglende intensitet ved  $(\pi, 0)$  og  $(0, \pi)$  (stiplede blå bokse). d)-e) Henholdsvis klassisk spin-bølge og kvantekontinuum spredning omkring  $(\pi, \pi)$  adskilt med polariserede neutroner.

### En rigdom af fænomener

Ovenfor har vi illustreret hvordan neutronspreddning kan bruges til at udforske kvantefysikkens fundamentale konsekvenser ved at studere hvilke slags tilstande og eksitationer, der eksisterer i magnetiske materialer. Vore eksempler udtømmer langt fra den fascinerende rigdom af fænomener, man støder på inden for kvantemag-

netisme. Man kunne i stedet have nævnt materialer hvor de basale, svagt koblede byggesten ikke, som i vore eksempler, er kæder eller planer men derimod singletter. Disse opfører sig som bosoner, og kan derfor ved lave temperaturer udvise *Bose-Einstein kondensation*. Andre eksempler kunne have været de fundamentale forskelle mellem kæder af heltallige spins og kæder af halvtallige spins, spontant opstående spin-hvirvler, eller emergente spin-frihedsgrader i *frustrerede* spin-systemer, hvori et givet spin ikke samtidigt kan minimere vekselvirkningsenergiene med alle dets naboer. Det står under alle omstændigheder klart, at selv om Niels Bohr grundlagde kvantefysikken for ca. 100 år siden, er der stadig mange fænomener vi mangler fuldt at forstå, og fremtidens forskning i kvantemagnetisme vil med sikkerhed hive flere hemmeligheder op fra dybet.



Begge forfattere arbejder med studier af kvantemagnetisme ved hjælp af neutronspreddning: *Henrik M. Rønnow*, til venstre, er tenure track professor ved École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Schweiz. *Niels B. Christensen*, til højre, er post. doc. i Afdelingen for Materialeforskning, Risø, og på Paul Scherrer Institutet i Schweiz.

## CV på WC

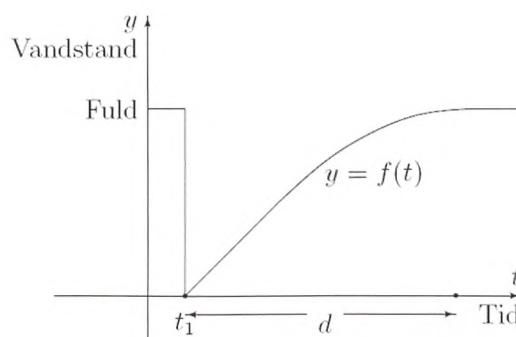
Af *Mogens Esrom Larsen*, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet og *KVANT*

Enhver Gerning om end nok saa dagligdags, vil altid kunne afvindes en vis Interesse eller drives til en vis Fuldkommenhed; ... Fra Frøken Jensens Kogebog, Forordet, kaldet "Husførelsen" (7. Oplag, 1902).

Lad os iagttage vandstanden i en cisterne på et wc med henblik på en matematisk beskrivelse af dens adfærd. Den typiske hændelse er et pludseligt fald fra fuld til tom, efterfulgt af en fyldning, der begynder med tilstrømning af vand med en konstant hastighed, men slutter med en opbremsning forårsaget af en flyder, der kan lukke for tilstrømningen.

Tømningerne forekommer til forskellige tider,  $t_1, t_2, \dots$  og fyldningen tager ialt tiden  $d$ . Tømningerne finder normalt først sted, når cisternen er fuld. Et typisk forløb er angivet på figur 1.

Tiderne for tømning er tilfældige i en eller anden forstand. En beskrivelse heraf kan ikke blive en forudsigelse af næste tømning, men de må forventes at blive styret af en eller anden sandsynlighed. Vi vil tænke os, at intervallerne  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  er fordelt med forskellige sandsynligheder, f.eks. sådan at de måske slet ikke forekommer mindre end  $d$ , og sådan, at lange intervaller er mindre sandsynlige end korte.

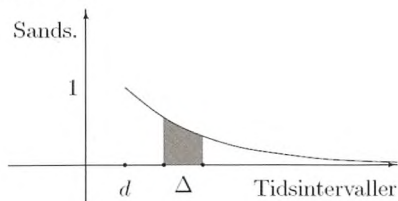


**Figur 1.** Figuren viser vandhøjden i cisternen som funktion af tiden. Til tiden  $t_1$  tømmes cisternen, hvorefter påfyldningen starter. I begyndelsen med konstant hastighed, men efter en tid sker der en opbremsning forårsaget af en flyder.

En simpel mulighed for sådan en fordeling kunne være en fordeling med eksponentielt aftagende tæthedsfunktion. Hvis vi kalder sandsynligheden for en hændelse,  $H$ , for  $P(H)$ , kan vi f.eks. tænke os sandsynligheden for hændelsen, at tidsintervallet er mindre end en vis tid,  $T$ , er givet som følger:

$$P(\Delta \leq T) = \frac{1}{\lambda} \int_d^T e^{-\lambda(t-d)} dt \quad T \geq d$$

Funktionen under integraltegnet kalde *tætheden* for fordelingen. Den ser ud som en langsomt dalende rejse mod 0 (se figur 2).



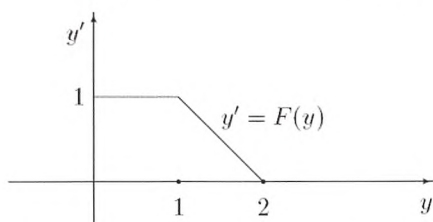
**Figur 2.** Tætheden beskriver sandsynligheden for tidsintervallerne,  $\Delta_i$ , på den måde, at sandsynligheden for, at  $\Delta_i$  ligger i et interval et sted på tidsaksen findes som arealet over dette interval under tætheden.

At korte intervaller har større hyppighed end lange, udtrykkes i folkevisdommen som den advarsel, at ulykker oftest kommer 3 ad gangen.

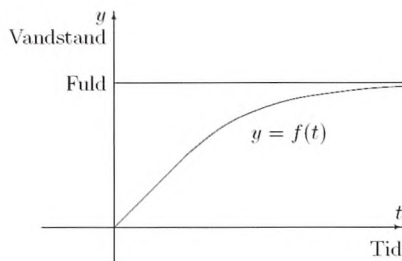
Men nu til den deterministiske del, påfyldningen. Det ser jo ud som om, hastigheden til dels afhænger af niveauet. I det mindste, når niveauet er kommet over et vist punkt. Sammenhængen mellem hastighed og niveau må kunne udtrykkes i en differentialligning af formen:

$$y' = \frac{dy}{dt} = F(y)$$

hvor  $F(y)$  åbenbart er konstant for små værdier af  $y$  og nul når cisternen er helt fuld. Altså noget i denne retning:



**Figur 3.** Dette såkaldte fase-diagram udtrykker sammenhængen mellem påfyldningshastigheden,  $y'$ , og vandstanden,  $y$ .



**Figur 4.** Løsningen til differentialligningen når ikke til en fyldt cisterne i endelig tid, en forhåbentlig urealistisk model.

Men dette valg er ikke korrekt, thi denne ligning, der f.eks. er

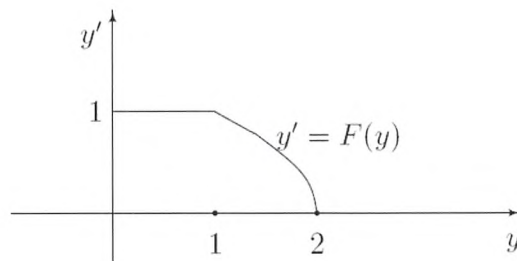
$$\frac{dy}{dt} = F(y) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ 2 - y, & \text{for } 1 < y \leq 2, \end{cases}$$

har en løsning, der ser ud som grafen i figur 4.

Den analytiske løsning til eksemplet er jo:

$$y = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - e^{1-t}, & \text{for } 1 < t. \end{cases}$$

Denne løsning er urealistisk, da den aldrig bliver færdig med at fylde cisternen. I virkelighedens verden bliver cisternen fuld i endelig tid, så løsningen ligner figuren ovenfor. For at dette skal blive tilfældet, må differentialligningen se noget anderledes ud. Den skal have lodret tangent i sit nulpunkt:



**Figur 5.** Et realistisk fase-diagram må have lodret tangent i sit nulpunkt for at løsningerne kan nå et niveau i endelig tid!

F.eks. kunne  $F$  være funktionen:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt{2-y}, & \text{for } 1 < y \leq 2. \end{cases}$$

Den lodrette tangent betyder, at der ikke gælder entydighed for løsningerne. Alle ender i endelig tid med at tangere den singulære løsning, der er konstant lig med en fuld cisterne, som på den første figur (med  $t_1 = 0$ ):

Løsningen til eksemplet er:

$$y = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - \frac{(3-t)^2}{4}, & \text{for } 1 < t \leq 3, \\ 2, & \text{for } 3 < t. \end{cases}$$



*Mogens Esrom Larsen* er lektor i matematik på Københavns Universitet og har været redaktør ved Kvant siden starten.