Hovedregning

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet.

Kan man regne i hovedet, hvis man skal? Eller er det kun Dustin Hoffman som *Rainman*, der er skruet så akavet sammen, at tallene uafladelig ryster ud af ærmerne på ham. Scenen, hvor han ser en æske tændstikker tabt på gulvet straks siger "246" (eller hvad det nu var), minder om Alice i "Through the Looking Glass and What Alice Found There", Chapter IX, Queen Alice, (Lewis Carroll, 1871).

"Can you do Addition?" the White Queen asked.

"What's one and one and one and one and one and one and one and one and one and one?"

"I don't know," said Alice, "I lost count."

"She can't do Addition," the Red Queen interrupted.

De fleste af os har det nok lidt som Alice.

Det er nu nok ikke, fordi autister har særlige evner for talbehandling. Det er snarere en tendens til monomani, der får dem, der interesserer sig for tal, til at lege med dem døgnet rundt. Og så bliver de ens fortrolige, så man som den berømte indiske matematiker, S. Ramanujan (1887–1920), der ifølge anekdoten til G. H. Hardy's (1877–1947) bemærkning:

"I thought the number of my taxicab was 1729, it seemed to me a rather dull number." svarede,

"No, Hardy! It is a very interesting number. It is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways."

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

Regner man meget, lægger man mærke til den slags overensstemmelser.

For 40 år siden var det interessante spørgsmål, om man kunne regne uden hoved, mens enhver havde nogen øvelse i at regne med hovedet. Det siges, at moderne mennesker bruger lommeregneren til at gange med 10 eller sågar 1. Nu er disse færdigheder gået i glemmebogen, hvorfra jeg har hentet et par tricks.

Den lille tabel

Når man regner i hovedet, er det nærmest nødvendigt at kunne nogle produkter – og summer – udenad. Man må kunne f.eks. at $2 + 3 = 5$ og at $2 \times 3 = 6$. Det er ikke fordi, der er så meget at huske, vel 45 summer og 36 produkter eller 31 primopløsninger.

Der er vi faktisk heldige. I oldtidens Assyrien og Babylon et par tusinde år før vor tidsregning havde man et positionssystem med grundtallet 60, – vi bruger stadig de første to hexagesimaler i tidsregningen kaldet minutter og sekunder. Så den lille tabel for 4000 år siden gik fra $2 \times 2 = 4$ til $59 \times 59 = 3481$ ialt – ja

$$\frac{58 \times 59}{2} = (30 - 1) \times (60 - 1) = 1801 - 90 = 1711$$

produkter at huske.

Den store tabel

At gange et tiertal med et enertal, f.eks. 7×17, er det svært at gøre meget lettere. Resultatet som $70 + 49 = 119$ er det lidt svært at nå nemmere. Men med primopløsning er der lejlighedsvis genveje, $9 \times 18 = 9 \times 9 \times 2 = 81 \times 2 = 162$. Så snart vi når op på to af tierne, er der lidt hjælp at hente. Den lille omskrivning

$$(10 + x)(10 + y) = (10 + x + y)10 + xy$$

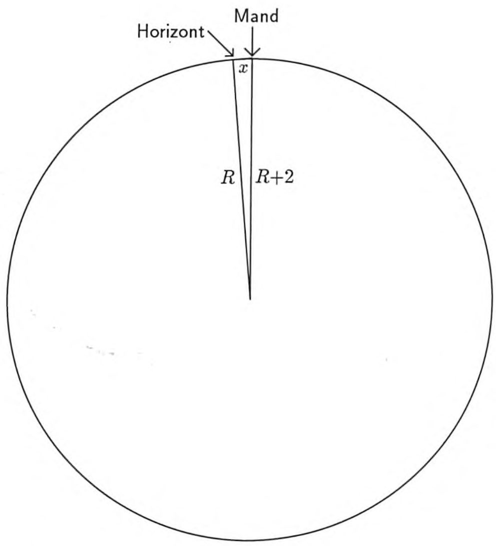
gør stor nytte. F.eks.

$$13 \times 19 = (13 + 9)10 + 3 \times 9 = 220 + 27 = 247$$
$$17 \times 19 = (17 + 9)10 + 7 \times 9 = 260 + 63 = 323$$

Så den store tabel behøver man ikke at anstrenge sig for at lære.

Uden lommeregner

Lad os tænke os en mand på stranden i badebukser og derfor uden lommer til lommeregneren eller mobiltelefonen. Han står nu og funderer over, hvor langt horizonten mon er væk. Det kan han da sagtens regne ud i hovedet!



Figur 1.

Det første problem er, at han ikke kan huske Jordens radius.

Det er der råd for, for den gamle definition af en meter er ikke helt skæv: En ti milliontedel af afstanden fra ækvator til nordpolen. Med andre ord: Jordens omkreds er 40000 km – pr. definition! Og vi kan godt bruge $\pi = \frac{22}{7}$ i en snæver vending, så Jordens radius er sådan cirka

$$R = \frac{7 \times 20000}{22} = \frac{70000}{11} = 6363$$

i hele km. Pythagoras på trekanten giver en ligning med x som afstanden til horizonten, idet vi regner mandens højde til ca. 2 m:

$$R^2 + x^2 = \left(R + \frac{2}{1000}\right)^2 = R^2 + \frac{4R}{1000} + \frac{4}{1000000}$$

Nu regner vi med, at kvadratet $\frac{4}{1000000}$ er nærmest ingenting, og da de to kvadrater på R går ud, får vi:

$$x^2 = \frac{4R}{1000} = \frac{4 \times 6363}{1000} = 25.4 \cdots$$

Så vi må finde afstanden til lidt større end 5 km. Hvor meget? Jo, vi kan godt komme nærmere, hvis vi lægger lidt til 5, får vi jo kvadratet

$$(5 + \epsilon)^2 = 25 + 10 \times \epsilon + \epsilon^2$$

så hvis det sidste kvadrat er meget lille, kan vi sætte $\epsilon = 0.04$ og dermed afstanden til horizonten i km til

$$5.04$$

Hvad har vi egentlig regnet? Delt 70 med 11 og ganget 636 med 4.

Nogle nyttige formler

Et par algebraiske formler er uhyre anvendelige. Den ene er kvadratet på en toleddet størrelse, som vi lige har brugt ovenfor, den anden er produktet af sum og differens af de samme to tal. Formlerne:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)(x-y) &= x^2 - y^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Eksempel:

$$7 \times 13 = (10-3)(10+3) = 100 - 9 = 91$$

Den anden formel gør også nytte til beregning af kvadrater, derfor skriver vi den også på formen:

$$x^2 = y^2 + (x+y)(x-y)$$

Eksempler:

$$\begin{aligned} 23^2 &= 3^2 + (23-3)(23+3) = 9 + 20 \times 26 \\ &= 9 + 520 = 52959^2 \\ &= 60^2 + (59+60)(59-60) = 3600 - 119 \\ &= 3481 \end{aligned}$$

For $y = 1$ kan man specielt bemærke formen

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + (x+1)$$

der også fås ved at sætte $x = y + 1$ i den anden formel.

Eksempler:

$$\begin{aligned} 21^2 &= 20^2 + 20 + 21 = 400 + 41 = 441 \\ 22^2 &= 21^2 + 21 + 22 = 441 + 43 = 484 \end{aligned}$$

Kvadrattal

Tal, der ender på 5, er særlig nemme at kvadrere,

$$\begin{aligned} (10x+5)^2 &= 5^2 + (10x+5-5)(10x+5+5) \\ &= 25 + x(x+1)100 \end{aligned}$$

F.eks. er

$$\begin{aligned} 25^2 &= 25 + 2 \times 3 \times 100 = 625 \\ 85^2 &= 25 + 8 \times 9 \times 100 = 7225 \\ 125^2 &= 25 + 12 \times 13 \times 100 = 15625 \end{aligned}$$

Kvadrattallene kan ellers nemt udregnes ved at relatere dem til 50 eller 100. Formlerne

$$\begin{aligned} (50+x)^2 &= 2500 + x \times 100 + x^2 \\ &= (25+x) \times 100 + x^2 \\ (100+x)^2 &= 10000 + 2x \times 100 + x^2 \\ &= (100+2x) \times 100 + x^2 \end{aligned}$$

kan bruges, hvis man først har udregnet de små kvadrater. Men dem finder man jo særlig let som i den store tabel, f.eks.

$$18^2 = 260 + 64 = 324$$

eller ved at gå ud fra 20 som ovenfor eller 25, f.eks.

$$\begin{aligned} 23^2 &= (25-2)^2 = 625 - 100 + 4 = 529 \\ 23^2 &= (25-2)^2 = 625 - 100 + 4 = 529 \\ 9^3 = 27^2 &= (25+2)^2 = 625 + 100 + 4 = 729 \end{aligned}$$

Formlerne ovenfor giver f.eks.

$$\begin{aligned} 54^2 &= (25+4) \times 100 + 4^2 = 2916 \\ 26^2 &= (25-24) \times 100 + 24^2 = 100 + 576 = 676 \\ 37^2 &= (25-13) \times 100 + 13^2 = 1200 + 169 = 1369 \\ 92^2 &= (100-16) \times 100 + 8^2 = 8464 \\ 86^2 &= (100-28) \times 100 + 14^2 = 7200 + 196 = 7396 \\ 117^2 &= (100+34) \times 100 + 17^2 = 13400 + 289 \\ &= 13689 \end{aligned}$$

Mere generel formel

Formlerne ovenfor kan generaliseres til følgende nyttige omregning, der allerede er benyttet til den store tabel:

$$(a+b)(a+c) = (a+b+c)a + bc$$

Det er klart, at for $b = c$ og $b = -c$ får vi de i (1) nævnte. Denne formel bruges med et godt valg for a, f.eks. et multiplum af 10 eller 100.

$$\begin{aligned}
23 \times 29 &= 32 \times 20 + 3 \times 9 = 640 + 27 = 667\\
23 \times 29 &= 22 \times 30 + (-7)(-1) = 660 + 7 = 667\\
37 \times 34 &= 41 \times 30 + 7 \times 4 = 1230 + 28 = 1258\\
37 \times 34 &= 31 \times 40 + (-3)(-6)\\
&= 1240 + 18 = 1258\\
106 \times 97 &= (100 + 6 - 3) \times 100 + 6 \times (-3)\\
&= 10300 - 18 = 10282\\
705 \times 694 &= (700 + 5)(700 - 6) = 699 \times 700 - 30\\
&= 490000 - 700 - 30 = 489270\\
12^3 &= 36 \times 48 = (40 - 4)(40 + 8)\\
&= 44 \times 40 - 4 \times 8 = 1760 - 32 = 1728
\end{aligned}$$

Krydsproduktet

Det almindelige tilfælde kan lettes ved det såkaldte krydsprodukt. Tallene tænkes stillet op det ene under det andet:

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ | & \times & | \\ z & & w \end{array}$$

Man danner nu produkterne $xz \times 100$ og yw, der tænkes som et 4–cifret tal. Derefter dannes summen $xw + yz$, der ganges med 10 og lægges til. F.eks.

$$\begin{aligned}
63 \times 46 &= 2418 + (6 \times 6 + 3 \times 4)10\\
&= 2418 + (36 + 12)10 = 2418 + 480 = 2898\\
36 \times 48 &= 1248 + (3 \times 8 + 6 \times 4)10\\
&= 1248 + 480 = 1728
\end{aligned}$$

Hvis $x = z$ eller $y = w$, er det lettere at udregne.

$$\begin{aligned}
34 \times 37 &= (900 + 28) + 3(4 + 7)10\\
&= 928 + 330 = 1258\\
63 \times 43 &= (2400 + 9) + 3(6 + 4)10\\
&= 2409 + 300 = 2709
\end{aligned}$$

At jonglere med mange tal

Det fortælles om den senere så berømte matematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855), at hans lærer i første klasse for at beskæftige ham bad ham lægge tallene fra 1 til 100 sammen. Gauß gav straks summen 5050.

Han så dem for sig, forfra og bagfra:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 2 & 1 \end{array}$$

Vi ser, at der er 100 summer af hver 2 tal, der alle giver 101. Så det dobbelte af den søgte sum er 10100. Den almindelige formel er

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hvis vi nu tilsvarende ser på summer af kun ulige tal, så er jo

$$1 + 3 = 4, \quad 4 + 5 = 9, \quad 9 + 7 = 16, \quad 16 + 9 = 25$$

altså lutter kvadrattal. Er det altid rigtigt?

Gør vi som Gauß, kan vi jo skrive summen af de første n ulige tal forfra og bagfra

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \dots & 3 & 1 \end{array}$$

og se, at der er n summer af hver to tal, med summen $2n$. Den dobbelte sum er altså $2n^2$.

Man kender formler af den art for alle potenssummerne. For summen af kvadraterne gælder formlen

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

F.eks. er

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$$

og for kubiksummerne gælder en sjov formel; da jo

$$1 + 8 = 9, \quad 9 + 27 = 36, \quad 36 + 64 = 100,$$

$$100 + 125 = 225, \quad \dots$$

alle er kvadrattal, kan man spørge, om det er et tilfælde. Men formlen er

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

For $n = 6$ får vi altså, idet $6^3 = 12 \times 18 = 216$, $225 + 216 = 441 = 21^2$.

Bemærk den skøre formel,

$$(1 + 2 + \cdots n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Produktet af de 10 mindste primtal

Det er hovedregning at beregne produktet af de 10 mindste primtal. Altså:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$$

Lad os dele problemet op i små bekvemme grupper:

$$\begin{aligned}&2 \times 5\\&7 \times 11 \times 13\\&17 \times 19\\&23 \times 29 \times 3\end{aligned}$$

Den første er inden for den lille tabel, $2 \times 5 = 10$. Lad os benytte vores metoder til de andre. Først er jo $7 \times 13 = 91$. Derefter er $91 \times 11 = 901 + 100 = 1001$. De næste husker vi $17 \times 19 = 323$ og $23 \times 29 = 667$.

Med andre ord, vi har uden større besvær

$$\begin{aligned}2 \times 5 &= 10\\7 \times 11 \times 13 &= 1001\\17 \times 19 &= 323\\23 \times 29 \times 3 &= 667 \times 3\end{aligned}$$

Så vore produkt er blevet til

$$10 \times 1001 \times 323 \times (667 \times 3)$$

Disse 4 tal må man have i hovedet, men det er nok muligt. Vi kan jo tænke på det sidste tal som ca. to trediedele af 1000. Det er uhyre bekvemt, vi finder simpelthen

$$3 \times 667 = 3 \times \left(\frac{2}{3} \times 1000 + \frac{1}{3}\right) = 2 \times 1000 + 1 = 2001$$

Med andre ord en lige så nem faktor som de 1001. Produktet af disse to er også til at holde i hovedet, det er jo

$$1001 \times 2001 = 2003001$$

Når vi nu ganger med faktoren, 323, er vi særlig heldige, at cifrene er små og deres antal kun tre. Så vi får simpelthen

$$323 \times 2003001 \times 10 = 6469693230$$

Altså siger vi seks milliarder, fire hundrede og ni og tres millioner, seks hundrede og tre og halvfems tusinde, to hundrede og tredive.

Delelighed med primtal

Det første delelighedsproblem er deling med 7. Tallene 2, 3 og 5 går ved endelse eller tværsum. Men hvad med 7?

Sætningen siger, at et tal af formen $a \times 10 + b$ er delelig med 7, netop når tallet $a - 2 \times b$ er deleligt med 7.

Det trick, vi benytter, virker for alle primtal. Vi søger for 7, 11, 13, 17, 19 osv. et multiplum, der er 1 fra et tal, der er deleligt med 10. Vi finder uden videre:

$$\begin{aligned}3 \times 7 &= 21\\1 \times 11 &= 11\\3 \times 13 &= 39\\3 \times 17 &= 51\\1 \times 19 &= 19\\3 \times 23 &= 69\\1 \times 29 &= 29\end{aligned}$$

Vi kan trække fra og lægge til uden at ændre på, om primtallet går op, og bemærker, at faktoren 10 hverken kan gøre fra eller til, når det drejer sig om, at et primtal forskelligt fra 2 og 5 skal gå op. Så hvert af tallene er delelige med det betragtede primtal, netop når den sidste parentes er det:

$$\begin{aligned}10a + b - 21b &= 10a - 20b = 10(a - 2b)\\10 + b - 11b &= 10a - 10b = 10(a - b)\\10a + b + 39b &= 10a + 40b = 10(a + 4b)\\10a + b - 51b &= 10a - 50b = 10(a - 5b)\\10a + b + 19b &= 10a + 20b = 10(a + 2b)\\10a + b + 69b &= 10a + 70b = 10(a + 7b)\\10a + b + 29b &= 10a + 30b = 10(a + 3b)\end{aligned}$$

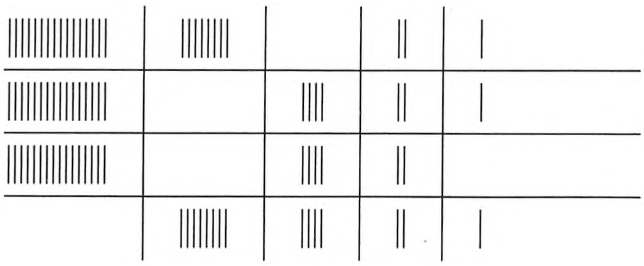
Eksempler:

7 :	(-2)	1001	$100 - 2 = 98$	$9 - 16 = -7$
11 :	(-1)	1001	$100 - 1 = 99$	$9 - 9 = 0$
13 :	$(+4)$	1001	$100 + 4 = 104$	$10 + 16 = 26$
17 :	(-5)	323	$32 - 15 = 17$	
19 :	$(+2)$	323	$32 + 6 = 38$	$3 + 16 = 19$
23 :	$(+7)$	667	$66 + 49 = 115$	$11 + 35 = 46$
29 :	$(+3)$	667	$66 + 21 = 87$	$8 + 21 = 29$

For 11 fører det til den generelle regel, at 11 går op, når det går op i den alternerende tværsum, altså summen af hvert andet ciffer minus summen af de øvrige cifre.

Nim

I dette tændstikspil går det ud på at være den sidste, der trækker. Man har forelagt nogle bunker med tændstikker, og man må så fjerne mindst én fra én bunke. Man må gerne fjerne hele bunken. Bunkerne med 27, 23, 22 og 15 tændstikker ordnes som:



Figur 2.

Da der er et ulige antal 16–grupper, vælger vi en af de bunker, der er større end 16. Da der er et ulige antal 4–grupper, må vi fjerne 4, hvis der er 4, eller tilføje 4, hvis der mangler 4. Tilsvarende for 1–grupperne. Det giver os de tre mulige vindende træk fra denne position i spillet nim.

Her er regnestykket for at vinde at skrive antallet af tændstikker i hver bunke i 2–talsystemet og lægge disse tal sammen med den specielle regel, at $1 + 1 = 0$. Hvis summen er 0, kan man kun vinde, hvis modspilleren gør en fejl. Hvis summen er forskellig fra 0, kan man vinde ved at gøre et træk, der får summen til at blive 0. Denne strategi virker, fordi det aldrig er muligt at føre en sum på 0 til en anden sum på 0 i et træk.

27	=	1	1	0	1	1
23	=	1	0	1	1	1
22	=	1	0	1	1	0
15	=	0	1	1	1	1
sum	=	1	0	1	0	1

Vi finder summen $16 + 4 + 1 = 21$. Vi kan altså vinde ved at fjerne 21 tændstikker fra anden bunke, der har 23. Men det nytter ikke at fjerne 21 fra første eller tredie bunke! Hvis vi skal fjerne nogen fra første bunkes 27, skal vi fjerne 16, tilføje 4 og fjerne 1, altså fjerne ialt 13! Og skal vi fjerne nogen fra den tredie bunke, skal det være 16 og 4, men vi skal tilføje 1, så vi skal ialt fjerne 19.

En måde at regne på, er at lægge 3 af bunkerne sammen for at se, hvor stor den fjerde skal være for at give sum 0. Summen af de 3 nederste er $1110 = 8+4+2 = 14$, så vi skal reducere første bunke til 14 dvs. fjerne $27 - 14 = 13$. Summen af første og de to sidste er $10 = 2$, så vi skal reducere anden bunke til 2, altså fjerne $23 - 2 = 21$. Summen af de to første og den sidste er $11 = 2 + 1 = 3$, så vi skal reducere tredie bunke til 3, altså fjerne $22 - 3 = 19$ fra tredie bunke. Men summen af de tre første er $11010 = 16 + 8 + 4 = 28$ og det er flere, end der er i fjerde bunke. Så den kan vi ikke bruge.

Josephus problemet

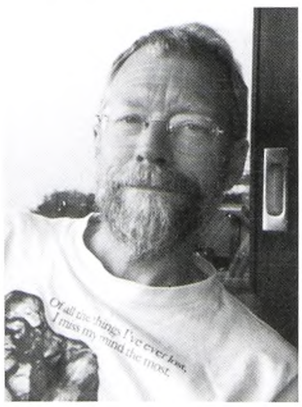
Det fortælles, at efter Jerusalems ødelæggelse i år 70 e. v. t. havde den jødiske forfatter Josephus sammen med 40 andre jøder søgt tilflugt i en kælder. Alle undtagen Josephus selv og en af hans venner ville ved den lejlighed begå selvmord, fordi de hellere ville dø end falde i romernes hænder. Josephus, som vægrede sig ved åbenlyst at indrømme, at han ikke ønskede at dø, foreslog, at man stillede sig på en lang række, og at hver anden, som derefter blev talt ud, skulle gå i døden frivilligt. Forslaget blev vedtaget, og Josephus og hans ven reddede sig ved at blive de to sidste, der blev talt ud. Her havde Josephus virkelig brug for hovedregning!

Nu er det jo nemt nok at tælle sig frem til, på hvilke pladser de to skulle stille sig, hvilke er det for resten? Svaret er 19 og 35.

Men hvad er den almindelige formel, hvis der er n personer på række der tæller 1–2 og lader hver anden gå ud af legen, hvem er da den sidste i spil?

Hvis antallet af deltagere er en potens af 2, altså $n = 2^m$, så vil nr. 1 være den sidste. For efter at man er løbet rækken en gang igennem, står nr. 1 stadig som nr. 1, mens der nu er 2^{m-1} deltagere tilbage, så situationen er som før, blot med halvt så mange deltagere.

Hvis antallet af deltagere er $k < 2^m$ større end 2^m, altså $n = 2^m + k$, så vil den, der har nr. $2k + 1$ være den sidste. Thi, når vi har talt til to og udeladt nr. 2, så er der jo $k - 1$ flere end 2^m, mens den udvalgte nu har fået nyt nummer $2k + 1 - 2 = 2(k - 1) + 1$. Det går, indtil vi har udskilt k af deltagerne. Så er vi i den situation, at der er 2^m deltagere og vor udvalgte er på plads nr. 1 som ovenfor. F. eks. Josephus oprindelige problem med 41 deltagere. Da $41 = 32 + 9$, er vort $k = 9$, så den sidste bliver nr. $19 = 2 \times 9 + 1$. Den næstsidste er forskudt 16 pladser fra den sidste.



Mogens Esrom Larsen, er lektor ved Matematisk Institut, Københavns Universitet og medlem af Kvants redaktion.