To ud af tre – de klassiske problemer

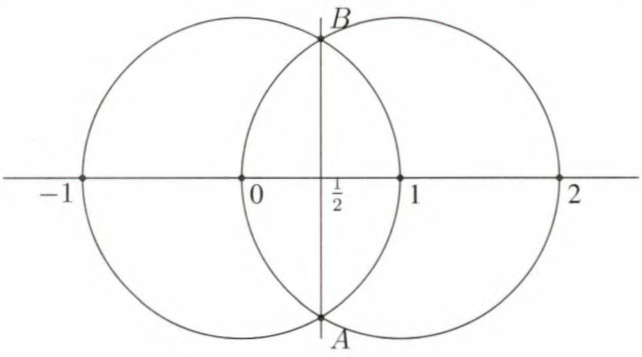
Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø

Indledning

Der er, som alle jo ved, tre klassiske problemer i geometrien, der alle tre drejer sig om konstruktion med passer og lineal. Det ene er cirklens kvadratur, dvs. den opgave, at konstruere et kvadrat med samme areal som en given cirkel. En opgave, der kan formuleres sådan, om det er muligt at konstruere et liniestykke med længden π. Denne opgave vil vi lade ligge.

De to andre vedrører begge tallet tre. Vinklens tredeling går ud på at konstruere en vinkel, der er en trediedel af en given vinkel, mens terningens fordobling går ud på at konstruere et liniestykke med længden $\sqrt[3]{2}$. Til den sidste opgave hører historien, at en sot, der plagede indbyggerne på øen Delos, ifølge oraklet i Delphi ville ophøre, når man fordoblede – i rumfang – templets kubiske alter.

Ingen af disse opgaver kan løses; i det følgende skal jeg forklare, hvad vi mener med det. Der er flere uklarheder i formuleringen, *Vi kan ikke tredele vinkler.* Dels er der *kan,* der her betyder, ikke blot at vi ikke har fundet ud af det endnu, men at vi har fundet ud af, at det aldrig vil kunne lade sig gøre. Dels de begrænsninger, der er i hjælpemidlerne, nemlig at vi kun vil tillade en ganske indskrænket brug af to hjælpemidler, passer og lineal.



Figur 1

Problemformulering

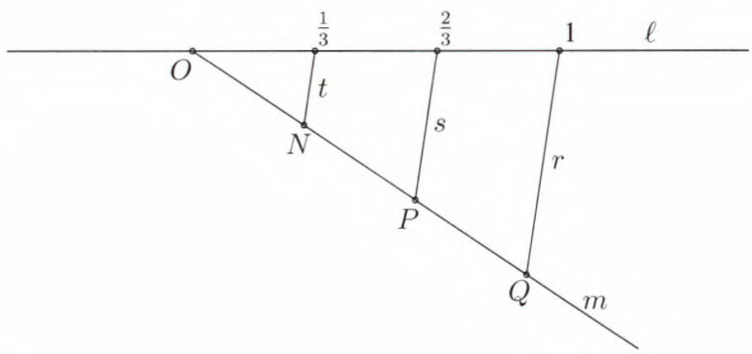
Først må vi forstå, hvad konstruktion med passer og lineal vil sige. Vi vil tillade os følgende. I begyndelsen kan to punkter være givet, men ikke flere. Vi kan så dels tegne de cirkler, der har det ene punkt som centrum og går gennem det andet, dels den linie, der går gennem de to punkter. Herefter kan vi inddrage de ny skæringspunkter, der måtte forekomme, og med dem gentage operationerne. Anden brug af værktøjerne er ikke tilladt.

Lad os nu antage, at vi har to forskellige punkter, som vi kalder 0 og 1. Vi tegner linien gennem de to samt cirklerne med det ene som centrum gennem det andet, finder de to cirklers to skæringspunkter med hinanden og med linien. Derefter tegner vi linien gennem cirklernes skæringer med hinanden.

De således vundne punkter, $-1, 2, A, B, \frac{1}{2}$ er eksempler på punkter, der er fremkommet ved konstruktion. Nu er punkterne på linien gennem 0 og 1 angivet ved tal, fordi de svarer til tal. Liniestykket fra -1 til 0 er lige så langt som liniestykket fra 0 til 1, mens liniestykket fra 0 til 2 er dobbelt så langt.

Vi kan konstruere alle de punkter, der svarer til rationale tal, f. eks. kan vi tredele et liniestykke således:

Konstruktionen foregår i alfabetisk orden, således at $NP = ON$, $PQ = ON$, r går fra q til 1, s og t er parallelle med q. Disse linier skærer nu ℓ i punkter, der svarer til $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$. Her er underforstået, at vi har lært at tegne parallelle linier med passer og lineal.



Figur 2

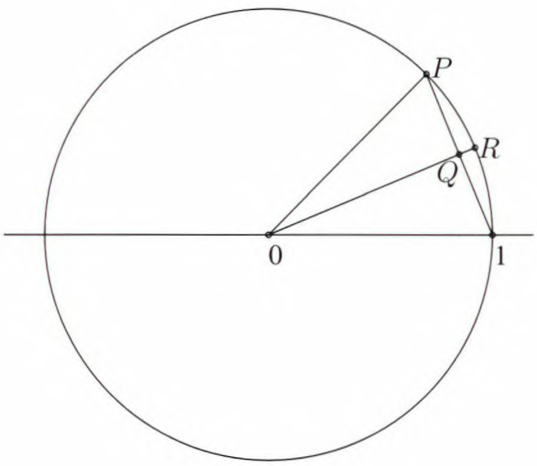
Betragter vi en cirkelbue i stedet for et liniestykke,som i figur 3, kan vi halvere buen simpelt hen ved at halvere den tilsvarende korde, $1P$, kalde midtpunktet Q og tegne linien gennem 0 og Q. Den skærer cirkelbuen i midtpunktet R.

Spørgsmålet er nu, om vi med denne brug af passeren og linealen nogensinde vil nå til det punkt på cirklen, der nøjagtig tredeler den givne vinkel?

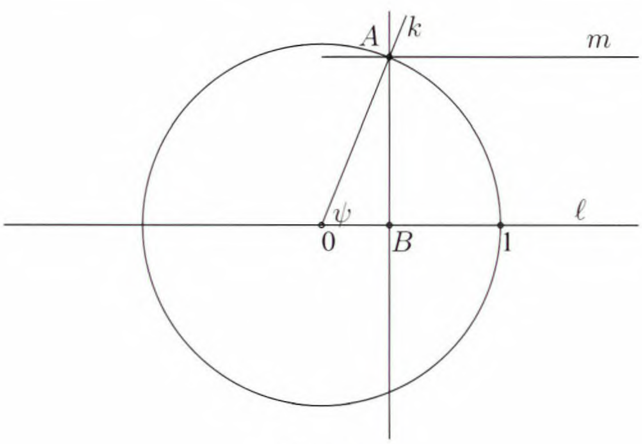
Indskydning

Indskrænkningen i reglerne for især linealens brug er ganske væsentlig. Allerede i oldtiden kunne man tredele en vinkel ganske nøjagtigt ved en udvidet brug af en lineal:

Vi afsætter på linealen to punkter, der har en foreskrevet indbyrdes afstand, altså samme afstand som den, der er mellem to givne eller allerede konstruerede punkter. Derefter lægger vi linealen på papiret op ad en blyant, der holdes på et bestemt punkt. Linealen tilpasses nu ved drejning og forskydning så de to punkter kommer til at ligge på hver sin givne linie. Med andre ord, vi vedtager, *at det er muligt at tegne en linie, der går gennem et givet punkt og skærer to givne (skærende) linier, så det afskårne liniestykke har en givet længde.*



Figur 3



Figur 4

Vi ønsker at tredele vinklen $\angle\psi$ mellem linierne ℓ og k. Vi tegner cirklen med centrum i 0 og radius 1 på ℓ, den skærer linien k i punktet A. Derefter tegnes AB vinkelret på ℓ. Endelig tegnes linien m gennem A parallel med ℓ.

Vi foretager nu i henhold til metoden ovenfor en indskydning, dvs. vi tegner gennem 0 linien, n, der skærer AB i C og m i D, så afstanden $CD = 2$.

Betragter vi $\triangle ACD$, ser vi, at $\angle DAE = \angle ADE = \angle COB = \phi$. Altså er $\angle AOC = \angle AEC = 2\phi$. Vi har tredelt vinkelen $\angle AOB = \psi$.

Denne metode har være kendt siden det 5. århundrede f. v. t.

Approksimation

Hvis man ser praktisk på sagen, og blot ønsker at bestemme en vinkel, der er så god som en trediedel til alle praktiske formål, så er det ingen større kunst at finde sådan en. En meget enkel måde består i at halvere vinkelen, halvere den halve oppefra, derefter igen halvere nedefra osv. Med andre ord, vi finder vinkelen

$$\phi_n = \frac{\phi}{2} - \frac{\phi}{4} + \frac{\phi}{8} - \frac{\phi}{16} + \frac{\phi}{32} - \cdots \pm \frac{\phi}{2^n}$$

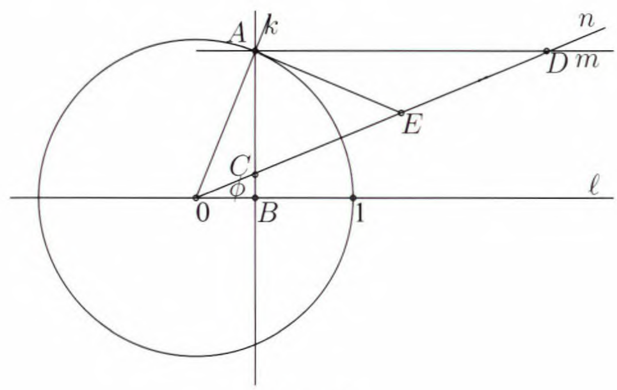
Lægger vi det halve til, får vi, idet de midterste led går ud,

$$\frac{3\phi_n}{2} = \frac{\phi}{2} \pm \frac{\phi}{2^{n+1}}$$

Med andre ord, vi har fundet,at

$$\phi_n = \frac{\phi}{3} \pm \frac{\phi}{3 \cdot 2^n}$$

Vi kan altså komme så tæt til trediedelen, som vi måtte ønske, uden nogensinde at nå den.



Figur 5

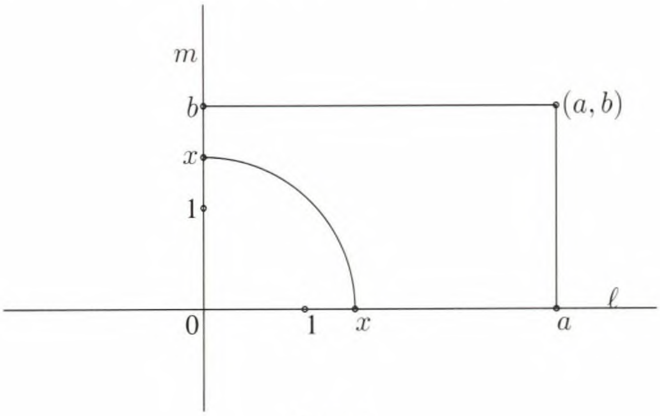
Det umuliges kunst

Hvad er det så, vi ikke kan? Jo, det er med den indskrænkede brug af passer og lineal nogensinde at nå til den vinkel, der tredeler en vis given vinkel. Vi må derfor spørge, om vi kan beskrive de punkter, som vi faktisk kan konstruere, til forskel fra resten af punkterne i planen.

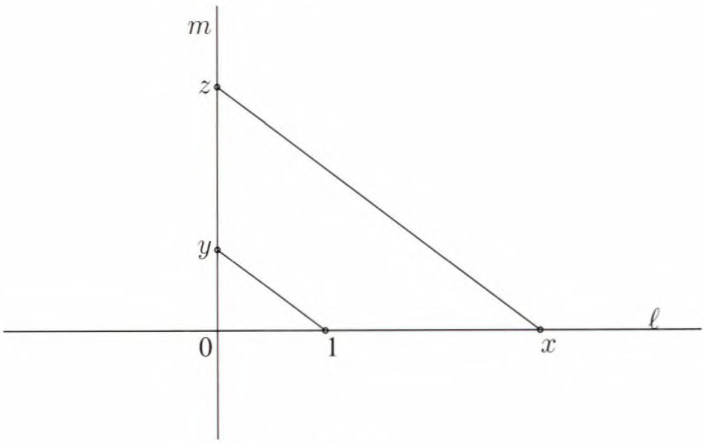
Konstruerbare tal

Derfor spørger vi, hvilke tal på linien ℓ kan vi konstruere ud fra de givne tal, 0 og 1. Vi har allerede set, at vi kan konstruere alle rationale tal. Med passeren kan vi flytte dem til linien, m, vinkelret på ℓ i 0, og ved opretning af vinkelrette i to konstruerede tal, a og b, på henholdsvis ℓ og m, kan vi konstruere et punkt i planen. Dette punkt betegner vi (a, b), og tallene kaldes punktets *koordinater.* Spørgsmålet om konstruerbare punkter er derfor det samme som spørgsmålet om konstruerbare tal på akserne.

Vi kan umiddelbart konstruere tal, der svarer til sum, differens, produkt og kvotient af allerede konstruerede tal. Desuden kan vi konstruere kvadratroden af et allerede opnået tal. Men det er også alt, hvad vi kan.

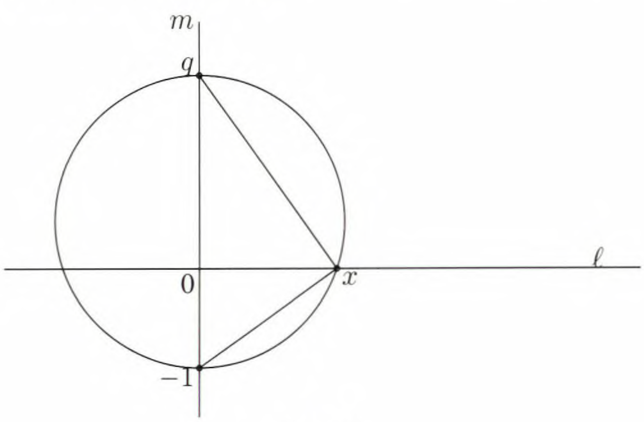


Figur 6



Figur 7

Da $x : 1 = z : y$, og vi kan finde x eller z, når de andre to er givet, kan vi altså finde produktet, $z = x \cdot y$, og kvotienten, $x = \frac{z}{y}$. Dertil kommer, at vi kan bestemme kvadratroden af et tal, q:



Figur 8

Vi tegner blot cirklen med diameter $1 + q$, så vil den vinkelrette på diameteren i skillepunktet skære cirklen i punktet $x = \sqrt{q}$.

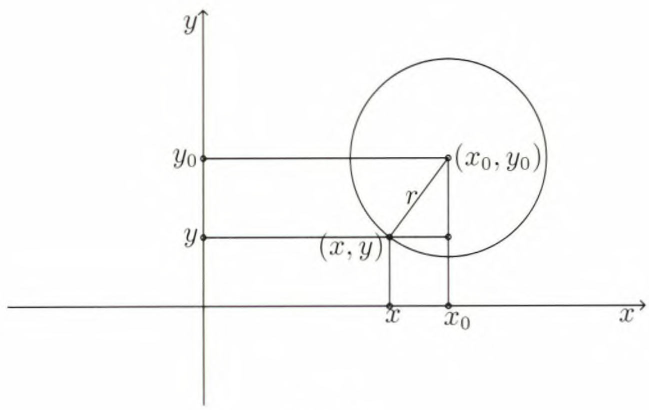
Det afgørende er imidlertid, at hermed er vore muligheder udtømt. En linie gennem to givne punkter med koordinater (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er givet ved ligningen:

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

Ligningens koefficienter findes altså ud fra punkternes koordinater ved almindelig regning med de 4 regningsarter. Skæringspunktet mellem to linier har koordinater, der findes ved at løse ligningerne. Også denne proces klares med de 4 regningsarter.

En cirkel karakteriseres ved, at punkterne har den konstruerbare afstand, r, til et konstrueret punkt, centrum, (x_0, y_0). Ifølge Pythagoras bliver punkternes koordinater derfor karakteriseret ved ligningen:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Figur 9

Ligningens koefficienter indeholder kun konstruerbare tal. Skærer vi cirklen med en linie, skal vi løse to ligninger med to ubekendte, hvoraf den ene er af første mens den anden er af anden grad. Substitueres førstegradsligningen i andengradsligningen, skal vi blot løse en andengradsligning. Dette kræver præcis én uddragelse af en kvadratrod.

To cirklers skæring kræver ikke noget nyt. Differensen mellem ligningerne giver en førstegradsligning for en linie, der, hvis cirklerne skærer hinanden, går gennem skæringspunkterne. Vi klarer os derfor stadig med én kvadratrod.

Hver gang vi konstruerer ét nyt punkt, kan koordinaterne til dette findes ud fra de givne punkters koordinater ved hjælp af de 4 regningsarter og eventuelt én kvadratrod.

Tallegemer

En mængde af tal med den egenskab, at vi forbliver inden for mængden, når vi udfører de fire regningsarter, – på nær division med 0, – kaldes et *tallegeme.* For eksempel er mængden af rationale tal, **Q**, et tallegeme. Hvis nu **L** er et tallegeme og $q \in \mathbf{L}$ et tal, så $x^2 = q$ ikke har nogen løsning, $x \in \mathbf{L}$, så er

$$\mathbf{L}(\sqrt{q}) = \{x + y\sqrt{q} \mid x, y \in \mathbf{L}\}$$

igen et tallegeme. Sum og differens får åbenbart samme form, og også produktet bliver

$$(x + y\sqrt{q})\,(u + v\sqrt{q}) = (xu + yvq) + (xv + yu)\,\sqrt{q}$$

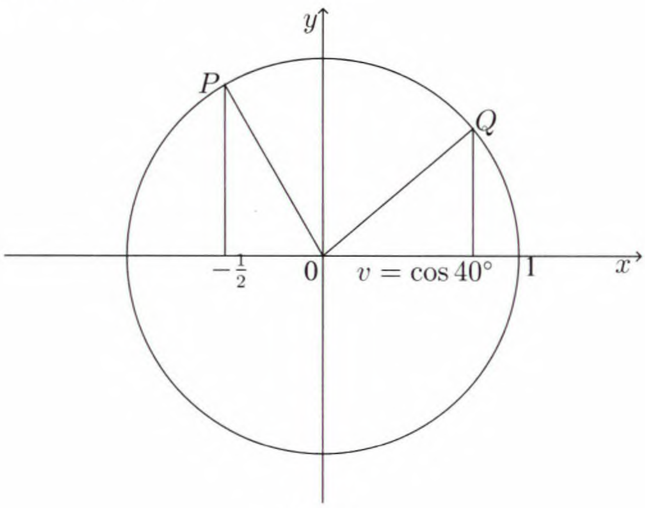
som igen har den ønskede form. Det spændende er, at man kan dividere, eller, at tallenes inverse har den ønskede form. Man finder:

$$\frac{1}{x + y\sqrt{q}} = \frac{x - y\sqrt{q}}{x^2 - y^2 q}$$

som åbenbart har den ønskede form. (Nævneren kan aldrig blive nul, når q ikke er et kvadrat.)

Tallegemernes betydning for konstruktionerne er, at har vi et sæt punkter med koordinater i et tallegeme **L**, så vil koordinaterne til et konstrueret punkt enten ligge i **L** eller i $\mathbf{L}\left(\sqrt{q}\right)$ for et eller andet $q \in \mathbf{L}$.

Starter vi konstruktionen med et par af punkter med rationale koordinater, vil en hvilken som helst konstruktion give et punkt, hvis koordinater ligger i et legeme, der er fremkommet ved endelig mange udvidelser med en kvadratrod.



Figur 10

Polynomiers division

Hvis vi har et trediegradspolynomium med koefficienter i et tallegeme, **L**, som har en rod $\alpha + \beta\sqrt{q}$ i det udvidede legeme, $\mathbf{L}\left(\sqrt{q}\right)$, så har det også en rod i **L**. Hvis polynomiet er

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

hvor $a, b, c \in \mathbf{L}$, og $\alpha + \beta\sqrt{q}$ er rod, så må jo

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 q + a\alpha^2 + a\beta^2 q + b\alpha + c & \\ + \left(3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta\right)\sqrt{q} &= 0 \end{aligned}$$

hvorfor

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 q + a\alpha^2 + a\beta^2 q + b\alpha + c &= \\ 3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta &= 0 \end{aligned}$$

Indsættes nu $\alpha - \beta\sqrt{q}$, ses det, at vi får

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 q + a\alpha^2 + a\beta^2 q + b\alpha + c & \\ - \left(3\alpha^2\beta + \beta^3 + 2a\alpha\beta + b\beta\right)\sqrt{q} = 0 - 0\sqrt{q} &= 0 \end{aligned}$$

Der må derfor være en tredie rod i $\mathbf{L}\left(\sqrt{q}\right)$, lad os sige $\gamma + \delta\sqrt{q}$. Altså er polynomiet, $p(x)$, produkt af 3 førstegradspolynomier, nemlig

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \alpha - \beta\sqrt{q})\,(x - \alpha + \beta\sqrt{q}) \\ &\quad (x - \gamma - \delta\sqrt{q}) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 q)\,(x - \gamma - \delta\sqrt{q}) \end{aligned}$$

Men da $p(x)$ har koefficienter i **L**, kan det kun lade sig gøre, hvis $\delta = 0$, altså hvis $p(x)$ har roden $\gamma \in \mathbf{L}$.

En trigonometrisk formel

Lad os vende tilbage til figur 5, men tænke os, at vi har tegnet den i omvendt orden. Vi har altså tegnet linien n først, og derefter tredoblet vinkelen ϕ, så linien k danner vinkelen 3ϕ med ℓ. Så skærer n cirklen i punktet med koordinaterne $(\cos\phi, \sin\phi)$, mens punktet A har koordinaterne $(\cos 3\phi, \sin 3\phi)$. Når nu cirklen har radius 1, så er $CD = 2$. De ensvinklede trekanter giver derfor umiddelbart formlerne

$$\begin{aligned} \cos 3\phi &= OC \cdot \cos\phi \\ \sin 3\phi &= (OC + 2) \cdot \sin\phi \end{aligned}$$

hvoraf vi finder

$$\sin 3\phi = \left(\frac{\cos 3\phi}{\cos\phi} + 2\right)\sin\phi$$

som kvadreret giver

$$\begin{aligned} \cos^2\phi\sin^2 3\phi &= \\ (\cos^2 3\phi + 4\cos^2\phi + 4\cos 3\phi\cos\phi)\sin^2\phi & \end{aligned}$$

Sættes $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$, fås ved benyttelse af $\sin^2 3\phi + \cos^2 3\phi = 1$, at

$$\begin{aligned} \cos^2 3\phi - 4\cos 3\phi\left(\cos^3\phi - \cos\phi\right) & \\ -4\cos^4\phi + 3\cos^3\phi &= 0 \end{aligned}$$

Denne lignings venstre side spaltes umiddelbart i et produkt, så vi får

$$(\cos 3\phi + \cos\phi)\,(\cos 3\phi - 4\cos^3\phi + 3\cos\phi) = 0$$

Da den første faktor ikke kan være 0, får vi formlen

$$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$$

En vinkel, der ikke kan tredeles

Vi påstår, at vinkelen $\psi = 120^\circ$ ikke kan tredeles. Med andre ord, at man ikke kan konstruere vinkelen 40°. Vinkelen ψ er karakteriseret ved, at $\cos\psi = -\frac{1}{2}$. Denne vinkel er altså umiddelbart konstruerbar, og koordinaterne til punktet kræver højst én kvadratrod, i dette tilfælde $\sqrt{3}$.

Lad os kalde $v = \cos 40^\circ$. Ifølge formlen for cosinus til den tredobbelte vinkel, er v rod i polynomiet

$$p(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$$

Ved konstruktionen af v har vi sukcessivt tilføjet kvadratrødder til legemer. Lad det næstsidste legeme være **L**, og det sidste $\mathbf{L}\left(\sqrt{q}\right)$. Vi kan altså skrive v på formen $v = \alpha + \beta\sqrt{q}$, hvor vi har $\alpha, \beta \in \mathbf{L}$. Det må jo betyde, som vi har set ovenfor, at polynomiet også har en rod i **L**.

Efter endelig mange gentagelser ender vi med, at polynomiet har en rod i **Q**. Altså et rationalt tal, $\frac{m}{n}$, hvor m og n er uden fælles divisorer, der opfylder:

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\frac{m}{n} + \frac{1}{2} = 0$$

eller bedre endnu $8m^3 - 6mn^2 + n^3 = 0$ Her må n være divisor i 8 og m divisor i 3, så der er kun endelig mange muligheder, men en prøve viser, at ingen af dem faktisk er rødder. Der er ingen rationale rødder i $p(x)$.

Terningens fordobling

I forhold til vinklens tredeling er terningens fordobling barnemad. Vi skal jo finde $\sqrt[3]{2}$, altså en konstruktiv løsning til ligningen $x^3 = 2$. Men nøjagtig som ovenfor slutter vi, at hvis der er en rod i et eller andet konstruerbart legeme, så er der en rational rod. Men intet rationalt tal har trediepotensen 2.

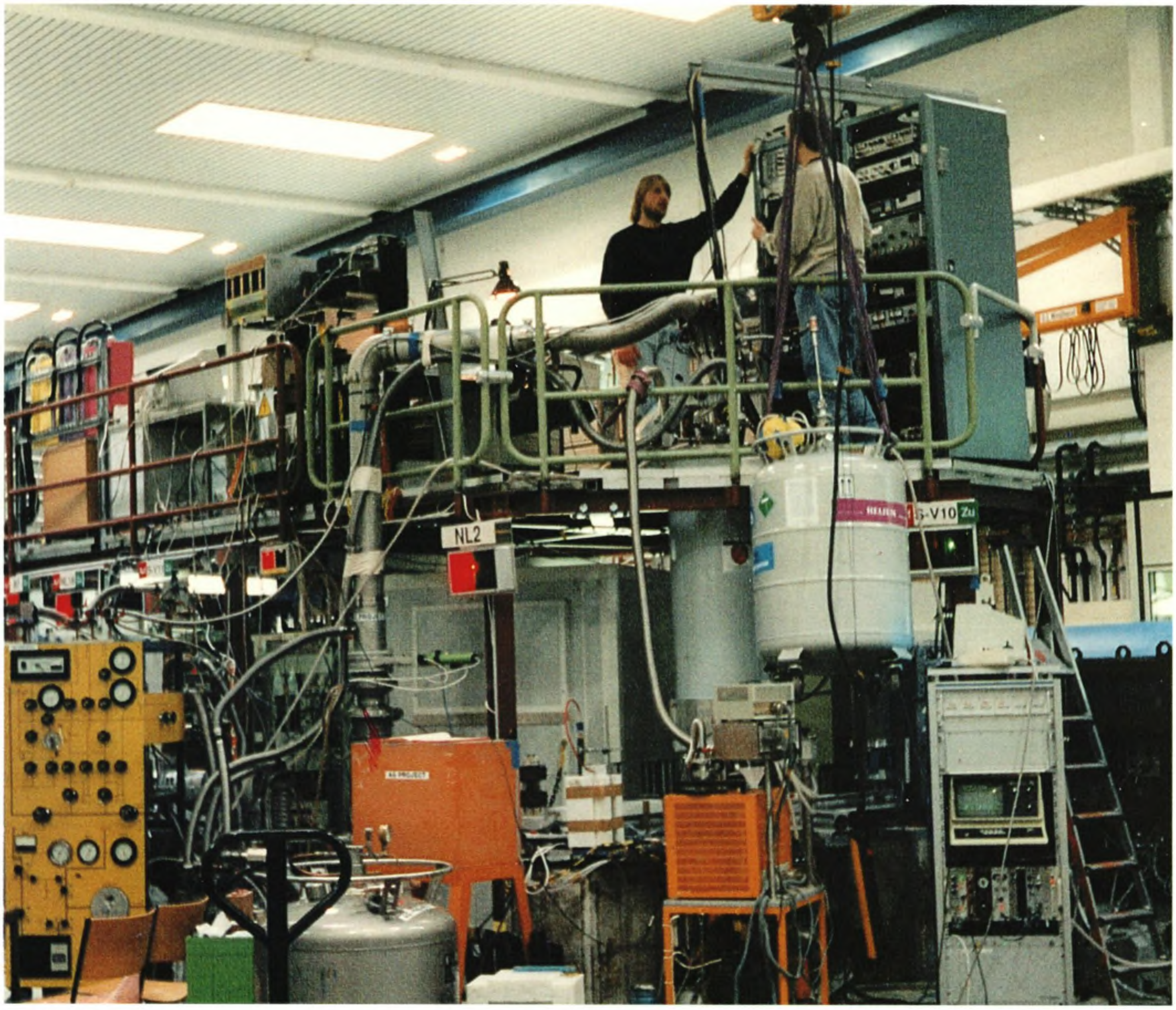
I matematik er der ikke blot noget, man ikke kan, men også noget, man ikke kan kunne!

Referencer:

1) Jesper Lützen: *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling*, Systime, Gjellerup, 1985.

Mogens Esrom Larsen redigerer matematikken i KVANT. Han er lektor ved Matematisk Institut på Københavns Universitet.

RESERVERET POSTVÆSENET



Abonnement på KVANT

koster 135 kr for en årgang og vil blive opkrævet pr. giro. Nye abonnenter vil modtage eventuelle tidligere numre af den løbende årgang. Medlemmer af Dansk Fysisk Selskab og Selskabet for Naturlærens Udbredelse vil modtage bladet som et medlemsblad.

Hvis du mener at du har abonnement, men ikke får bladet – har du nok glemt at melde flytning af bladet hos dit lokale postkontor, eller måske har du ikke betalt. Bemærk at flytning af KVANT skal meddeles postvæsenet eksplicit!

Abonnement tegnes ved at skrive til

Lene Körner, Matematisk Insitut, Universitetsparken 5, 2100 København Ø, e-mail: koerner@math.ku.dk