

# Fra Bernoullis forunderlige polynomier og tal via Euler–Maclaurins sumformel til Rombergs integralapproximation

Første del.

Mogens Esrom Larsen

Københavns universitets matematiske institut

Denne historie strækker sig over 300 år, fra Bernoullis opdagelse af sine vidunderlige polynomier til vore dages effektivisering af computerberegning. Ud over den umiddelbare fascination viste Bernoulli tallene sig at indgå i Euler–MacLaurins omskrivning af et integral til en sum af funktionens højere afledede i intervallets endepunkter. Netop derved har de interesse i forbindelse med moderne integralberegning, for det betyder, at fejlen ved en integralapproximation lader sig vurdere af et udtryk, hvori et Bernoullital indgår som faktor. Og det er netop sagen, for selv om vi kan regne så meget, vi lyster, så er det kun noget værd, når vi ved, hvor godt resultatet stemmer.

## Bernoullis polynomier og tal

Bernoullipolynomierne og Bernoullitalene blev indført af Jakob Bernoulli (1654–1705) i hans berømte værk, *Ars Conjectandi* (1713), hvori man finder mange interessante ting især om sandsynlighedsregning. Det af problemerne, som fører til Bernoullipolynomierne og dermed  $-$ tallene, drejer sig om bestemmelse af potenssummer.

Det er jo let nok at finde

$$\sum_{k=1}^n k^0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

og den simple formel,

$$\sum_{k=1}^n k^1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

er også let at finde, man summerer blot tillige bagfra:

$$2 \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{k=0}^n n = n(n+1)$$

Men Bernoulli stillede sig opgaven, at bestemme summerne af  $m$ -te potenserne, altså

$$\sum_{k=1}^n k^m = F(n, m), \quad F = ? \tag{1}$$

Vi ved allerede, at  $F(n, 0) = n$  og  $F(n, 1) = \frac{n(n+1)}{2}$ , men hvad er  $F(n, 2)$ ? (Man kan jo gætte på et trediegradspolynomium i  $n$  og finde koefficienterne ved at prøve med  $n = 1, 2, 3, 4$ , og så bevise formlen ved induktion efter  $n$ , men det vil vi afstå fra.)

Bernoulli greb opgaven an på den måde, at han søgte en løsning til opgaven, at finde en funktion,  $B(n, m)$ , sådan at

$$B(n+1, m) - B(n, m) = mn^{m-1} \tag{2}$$

Summerer vi denne ligning for en række værdier af den variable  $n$ , forsvinder det meste af venstre siderne (en såkaldt “teleskopsum”):

$$\begin{aligned} m \sum_{k=0}^n k^{m-1} &= \sum_{k=0}^n (B(k+1, m) - B(k, m)) \\ &= B(n+1, m) - B(0, m) \end{aligned}$$

Med andre ord, har vi en løsning til (2), finder vi umiddelbart løsningen til (1) som

$$F(n, m) = \frac{B(n+1, m+1) - B(0, m+1)}{m+1} \tag{3}$$

Dette er Bernoullis løsning, vi mangler blot at finde en løsning til (2). Vi søger løsninger, der er defineret for alle værdier af den første variable  $n$ , men kun positive, hele værdier af den anden variabel,  $m$ . Derfor skriver vi  $x$  i stedet for  $n$ :

$$B(x+1, m) - B(x, m) = mx^{m-1} \quad (4)$$

Har vi to løsninger til (2),  $B_1$  og  $B_2$ , så vil funktionen  $B_1 - B_2$  opfylde, at

$$(B_1(x+1, m) - B_2(x+1, m)) - (B_1(x, m) - B_2(x, m)) = mx^{m-1} - mx^{m-1} = 0$$

Den er med andre ord periodisk med periode 1. Hvis vi derfor har fundet to løsninger, der er polynomier i  $x$ , så er deres differens også et polynomium, der tilmed er periodisk. Det må derfor være konstant. Løsningen er altså entydigt bestemt på nær en konstant.

Vi analyserer nu opgaven, dvs. at vi antager, at vi har løst opgaven og fundet et polynomium,  $B(x, m)$ . Vi differentierer så (4) med hensyn til  $x$ , og får derved

$$B'(x+1, m) - B'(x, m) = m(m-1)x^{m-2} \quad (5)$$

Det betyder, at polynomiet

$$\frac{B'(x, m)}{m}$$

løser (4) for  $m-1$ . En anden løsning til (4) afviger herfra med en konstant. Vi definerer nu *Bernoullipolynomierne* som de polynomier, der løser (4), og hvis konstantled er valgt sådan, at

$$B'(x, m) = mB(x, m-1) \quad (6)$$

Dette betyder, at vi kan finde polynomierne ved successiv integration. Da vi for  $m=2$  har et andengradspolynomium, må vi forvente, at polynomierne grad er  $m$ .

Antag nu, at vi har polynomiet  $B(x, m)$  af grad  $m$ , som vi vil skrive på formen:

$$B(x, m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k}^m x^k \quad (7)$$

hvor  $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  er binomialkoefficienten  $m$  over  $k$ , og  $B_{m-k}^m$  er tal, vi skal finde. Vi har indexeret dem, så  $B_0^m$  er højstegrads-koefficienten. Vi indsætter nu (7) i (6) og får:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k}^m k x^{k-1} = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} B_{m-1-k}^{m-1} x^k$$

Nu er jo  $\binom{m}{k} k = m \binom{m-1}{k-1}$ , som vi kan bruge på venstre side samtidig med at vi udelader leddet for  $k=0$ , da det er 0, mens vi ændrer summationsindexet fra  $k$  til  $k-1$  på højre side:

$$\sum_{k=1}^m m \binom{m-1}{k-1} B_{m-k}^m x^{k-1} = m \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} B_{m-k}^{m-1} x^{k-1}$$

Når vi sammenligner koefficienterne i polynomierne på højre og venstre side af lighedstegnet, ser vi, at der gælder formlen:

$$B_{m-k}^{m-1} = B_{m-k}^m \text{ for } k = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

Denne fælles værdi vil vi fra nu af betegne med  $B_{m-k}$  og kalde *Bernoullitallet* med index  $m-k$ . Med andre ord, vi definerer

$$B_n = B_n^{n+k} \text{ for } k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Bernoulli polynomierne i (7) kan nu skrives med Bernoulli tallene som

$$B(x, m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k} x^k \quad (10)$$

For at finde Bernoulli tallene og dermed Bernoulli polynomierne, indsætter vi (10) i (4) og bruger binomialformlen på  $(x+1)^k$ :

$$\begin{aligned} B(x+1, m) - B(x, m) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k} ((x+1)^k - x^k) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{m-k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} x^j \sum_{k=j+1}^m \binom{m}{k} \binom{k}{j} B_{m-k} \end{aligned}$$

Vi benytter nu omskrivningen

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} \binom{k}{j} &= \frac{m!k!}{k!(m-k)!j!(k-j)!} \\ &= \frac{m!(m-j)!}{j!(m-j)!(k-j)!(m-k)!} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{k-j} \end{aligned}$$

og får derved

$$\begin{aligned} B(x+1, m) - B(x, m) &= \sum_{j=0}^{m-1} x^j \sum_{k=j+1}^m \binom{m}{j} \binom{m-j}{k-j} B_{m-k} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} x^j \sum_{k=j+1}^m \binom{m-j}{k-j} B_{m-k} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} x^j \sum_{k=1}^{m-j} \binom{m-j}{k} B_{m-j-k} \end{aligned}$$

Vi summerer nu den ydre sum bagfra ved substitutionen  $i = m - j$  og får

$$\begin{aligned} B(x+1, m) - B(x, m) &= \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} x^{m-i} \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} B_{i-k} \\ &= \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} x^{m-i} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} B_j \end{aligned}$$

idet vi til sidst har vendt retningen i den indre sum ved substitutionen  $j = i - k$ .

Nu ved vi jo fra (4), at dette skal være  $mx^{m-1}$ . Derfor er koefficienterne 0 på nær koefficienten til  $x^{m-1}$ . Vi får således rekursionsformlerne til beregning af Bernoullitallene:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} B_j &= 0 \text{ for } i > 1 \end{aligned} \tag{11}$$

De første Bernoullital ser meget uskyldige ud:

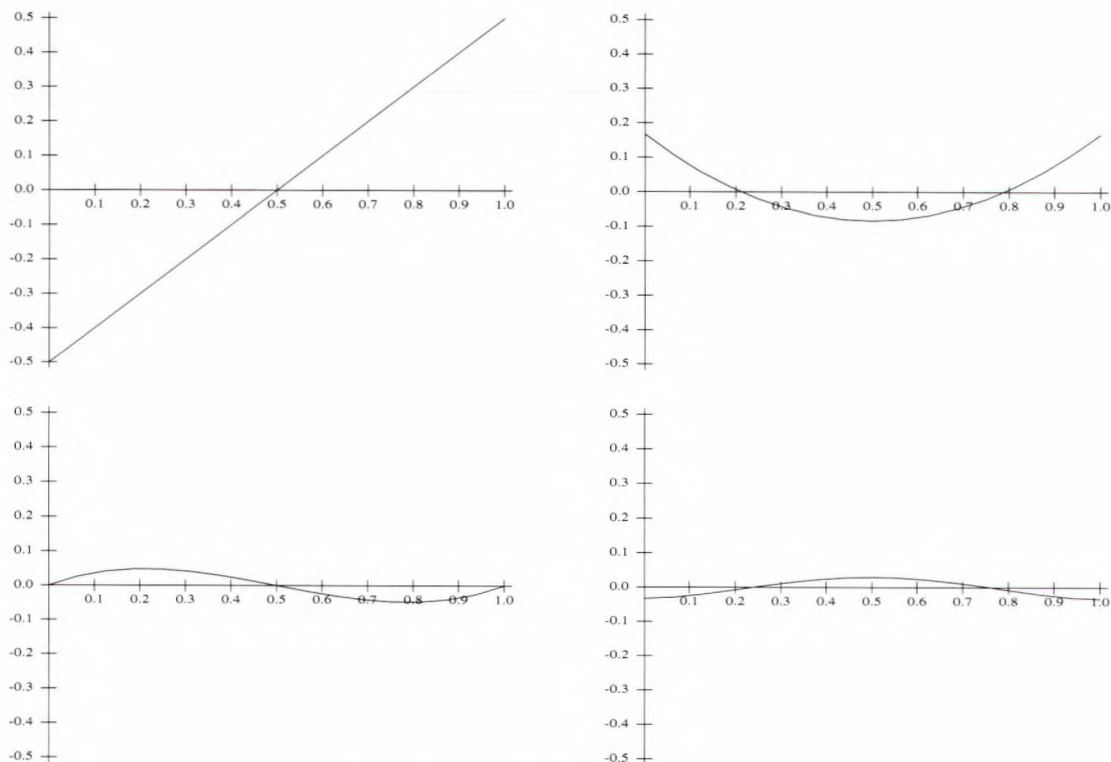
$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6} \tag{12}$$

men de vokser meget hurtigt, faktisk ligner de  $(2(2n)!)/((2\pi)^{2n})$ . F. eks. er nogle af dem

$$\begin{aligned} B_{20} &= -\frac{174611}{330}, B_{40} = -\frac{261082718496449122051}{13530}, \\ B_{60} &= -\frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{56786730} \end{aligned}$$

Så snart vi kender Bernoullitalene, kan vi umiddelbart skrive Bernoullipolynomierne op i henhold til (10):

$$\begin{aligned} B(x, 0) &= 1 \\ B(x, 1) &= x - \frac{1}{2} \\ B(x, 2) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B(x, 3) &= x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ B(x, 4) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B(x, 5) &= x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{3}\right) \\ B(x, 6) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \end{aligned} \tag{13}$$



Grafer for  $B(x, 1)$  til  $B(x, 4)$  på intervallet  $[0, 1]$

Ved deres hjælp løser vi umiddelbart Bernoullis problem, f. eks.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{(n+1)n(n-\frac{1}{2})}{3} = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{(n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2 - \frac{1}{30} + \frac{1}{30}}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Formlen (6) har interessante anvendelser. Vi kan jo integrere den og tilmed anvende (4) til at få

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(x, m) dx &= \frac{1}{m+1} [B(x, m+1)]_0^1 = \\ &= \frac{1}{m+1} (B(1, m+1) - B(0, m+1)) = 0^m = 0 \text{ for } m > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Denne egenskab kan umiddelbart benyttes til beregning af polynomier og tal, idet vi finder stamfunktionen af det forrige Bernoulli polynomium og så korrigerer med et konstantled, så integralet bliver 0. Dette konstantled er så Bernoullitallet. At ligningen

$$f(x+1) - f(x) = (m+1)x^m \quad (15)$$

kun løses af Bernoullipolynomiet  $B(x, m+1)$  på nær en konstant, har en interessant anvendelse. Vi kan jo gøre prøve med funktionen

$$f(x) = (-1)^{m+1} B(1-x, m+1) \quad (16)$$

Vi finder umiddelbart

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= (-1)^{m+1} (B(-x, m+1) - B(1-x, m+1)) = \\ &= -(-1)^{m+1} (m+1)(-x)^m = (m+1)x^m \end{aligned}$$

Med andre ord,  $f(x)$  afviger fra  $B(x, m+1)$  med en konstant. Frem for at finde denne, differentierer vi blot de to funktioner og får derved formen

$$B(1-x, m) = (-1)^m B(x, m) \quad (17)$$

Bernoullipolynomiets værdi i 0 er netop Bernoullitallet, og bortset fra  $B(x,1)$ , følger det af (14), at værdien i 1 også er Bernoullitallet. Af (17) følger, at for  $m$  ulige er  $B(1, m) = -B(0, m)$ , så for  $m > 1$  ulige er  $B_m = B(0, m) = 0$ . Af (17) følger også for  $m$  ulige, at  $B(\frac{1}{2}, m) = -B(\frac{1}{2}, m) = 0$ .

Af (17) følger, at for  $m$  lige, er Bernoullipolynomiet  $B(x, m)$  symmetrisk om linien  $x = \frac{1}{2}$ , mens det for  $m$  ulige er symmetrisk om punktet  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Fra  $m = 3$  har de ulige Bernoullipolynomier de tre nulpunkter, 0,  $\frac{1}{2}$  og 1. Men der kan ikke være flere i intervallet  $[0,1]$ . Thi har det  $m$ 'te af dem endnu et nulpunkt,  $x$ , giver symmetrien, at det har to, nemlig yderligere  $1 - x$ . Altså har det 5. Men så har det 4 ekstremer i intervallet, så ifølge (6) har det  $(m - 1)$ 'te (lige) Bernoullipolynomium ialt 4 nulpunkter i  $]0,1[$ . Igen ifølge (6) har det ulige  $(m - 2)$ 'te Bernoullipolynomium 3 nulpunkter i intervallet  $]0,1[$ , og hertil de to endepunkter, 0 og 1. Altså ialt 5. Men det gælder jo for alle  $m \geq 5$ , så vi ender med at få 5 nulpunkter for et polynomium af grad 3. Derfor kan ingen af de ulige have mere end 3 nulpunkter, og heraf fås igen, at de lige må nøjes med 2.

Heraf følger nu for  $m$  lige, at integralet vokser (aftager) indtil  $x = \frac{1}{2}$ , hvorefter det aftager (vokser) til 0 for  $x = 1$ . Det skifter med andre ord ikke fortegn i intervallet. Derfor gælder uligheden for  $0 < x < 1$ :

$$|B(x, 2m)| < |B_{2m}| \quad (19)$$

Ligningen

$$f(x + \frac{1}{2}) - f(x) = (m + 1)x^m \quad (19)$$

har åbenbart løsningerne  $B(x, m + 1) + B(x + \frac{1}{2}, m + 1)$  og  $2^{-m}B(2x, m + 1)$ , som begge er polynomier i  $x$ . Deres differens bliver derfor igen et polynomium, som tillige er periodisk og altså konstant. Ved differentiation af de to funktioner, fås samme funktion og derfor formlen

$$B(2x, m) = 2^{m-1} (B(x, m) + B(x + \frac{1}{2})) \quad (20)$$

Heraf fås for  $x = 0$  værdien

$$B(\frac{1}{2}, m) = -(1 - 2^{1-m}) B_m \quad (21)$$

For  $m$  lige er den numeriske værdi i  $\frac{1}{2}$  altså lige netop mindre end den numeriske værdi i 0 og 1.

### Euler-Maclaurins formel

Formlerne (6) og (14) fik Leonhard Euler (1707–1784) i 1732 og Colin Maclaurin (1698–1746) i 1742 til at bruge Bernoullipolynomierne til at finde en rækkeudvikling af et vilkårligt integral af en mange gange differentiabel funktion,  $f(x)$ , udtrykt ved funktionens højere afledede,

$$\int_a^b f(x)dx = ? \quad (22)$$

Vi starter med at udføre partiel integration af produktet af den vilkårlige funktion med  $B(x, 0) = 1$ . For nemheds skyld betragter vi intervallet  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 B(x, 0)f(x)dx \\ &= [B(x, 1)f(x)]_0^1 - \int_0^1 B(x, 1)f'(x)dx \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \int_0^1 B(x, 1)f'(x)dx \end{aligned} \quad (23)$$

Derefter udføres partiel integration på det sidste integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(x, 1)f'(x)dx &= \frac{1}{2} [B(x, 2)f'(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 B(x, 2)f''(x)dx \\ &= \frac{B_2}{2} (f'(1) - f'(0)) - \frac{1}{2} \int_0^1 B(x, 2)f''(x)dx \end{aligned}$$

Det er åbenbart en teknik, som vi kan blive ved med at udføre, så længe  $f$  kan differentieres

$$\begin{aligned} &\int_0^1 B(x, m)f^{(m)}(x)dx \\ &= \frac{1}{m+1} [B(x, m+1)f^{(m)}(x)]_0^1 - \frac{1}{m+1} \int_0^1 B(x, m+1)f^{(m+1)}(x)dx \\ &= \frac{B_{m+1}}{m+1} (f^{(m)}(1) - f^{(m)}(0)) - \frac{1}{m+1} \int_0^1 B(x, m+1)f^{(m+1)}(x)dx \end{aligned}$$

Vi foretrækker at slutte med et ulige  $m = 2n - 1$ , så det tilsvarende integral er

$$\int_0^1 B(x, 2n - 1) f^{(2n-1)}(x) dx$$

Til dette Bernoullipolynomium vælger vi stamfunktionen

$$\frac{B(x, 2n) - B_{2n}}{2n} \tag{24}$$

som er 0 i endepunkterne, så differensen forsvinder. Herved fås omskrivningen

$$\int_0^1 B(x, 2n - 1) f^{(2n-1)}(x) dx = 0 - \frac{1}{2n} \int_0^1 (B(x, 2n) - B_{2n}) f^{(2n)}(x) dx$$

Da (24) har konstant fortegn i intervallet, kan vi ved en vurdering af  $f^{(2n)}(x)$  mellem konstante grænser,

$$\alpha \leq f^{(2n)}(x) \leq \beta$$

få integralet vurderet ved

$$\int_0^1 |B(x, 2n) - B_{2n}| \alpha dx \leq \int_0^1 |B(x, 2n) - B_{2n}| f^{(2n)}(x) dx \leq \int_0^1 |B(x, 2n) - B_{2n}| \beta dx$$

Det kan derfor udtrykkes som en slags middelværdi. Der findes et tal  $\xi \in ]0, 1[$ , så

$$\int_0^1 (B(x, 2n) - B_{2n}) f^{(2n)}(x) dx = f^{(2n)}(\xi) \int_0^1 (B(x, 2n) - B_{2n}) dx = -B_{2n} f^{(2n)}(\xi)$$

idet vi benytter (14). Når vi substituerer den ene omregning i den forrige hele vejen tilbage til (23) får vi *Euler-MacLaurins formel*,

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} (f^{(2j-1)}(0) - f^{(2j-1)}(1)) - \frac{B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)$$

Formlen kan naturligvis transformeres til et vilkårligt interval, f. eks. intervallet  $[x_1, x_2]$ , idet vi nu finder  $\xi \in ]x_1, x_2[$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \frac{x_2 - x_1}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{B_{2j}}{(2j)!} (x_2 - x_1)^{2j} (f^{(2j-1)}(x_1) - f^{(2j-1)}(x_2)) - \frac{(x_2 - x_1)^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n} f^{(2n)}(\xi)$$

Af pladshensyn deles denne artikel i to. Anden del af Mogens Esrom Larsens artikel handler om bernoullitalenes forbindelse med Romberg integration. Den bringes i næste nummer af KVANT.(red.)



Mogens Esrom Larsen er redaktør af matematikken i KVANT. Han er ansat som lektor ved Københavns Universitet.