Fermats sidste sætning

Mogens Esrom Larsen



Om formiddagen Sct. Hans Aftensdag i år, uden sammenhæng iøvrigt, vækkede professor *Andrew Wiles,* Princeton, sit auditorium på det nyoprettede Isaac Newton Institut i Cambridge, England, ved at nå til den slutning, at Fermats sidste sætning er sand. Det er den sætning, der siger, at for hele, positive værdier af de variable, $x, y, z, n \in \mathbf{N}, n > 2$ har ligningen

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

ingen løsninger. Han havde ellers kamufleret sin epokegørende nyhed med foredragstitlen: *Modular forms, elliptic curves and Galois representations.* Rimeligt nok i forhold til hans bevisteknik.

Hermed er matematikkens største drage – i hvert fald siden cirklens kvadratur – endelig nedlagt. Sat op af matematikkens største amatør i flok med mange andre krævede den et af vort århundredes største professionelle geniers ihærdige arbejde i en årrække for at komme ned på jorden igen. Manuskriptet til beviset fylder ca. 200 sider, så der er tale om en længere afhandling.

Banemanden Andrew Wiles, der har læst matematik i Oxford, men taget sin doktorgrad i Cambridge, gjorde sig bemærket fra første færd og kom da også til Harvard og Princeton, som siden har kappedes om at have ham tilknyttet. Men han foretrak dog at detonere sin bombe hjemme i Cambridge.

Sætningen er fremsat af *Pierre de Fermat* (1601–1665), der levede i Toulouse som advokat, men var en af sin tids største matematiske begavelser. På den tid var tidsskrifter endnu ikke opfundet, så udvekslingen af ideer foregik ved personlig korrespondance, for Fermats vedkommende med Pascal, Descartes, Mersenne, Huygens, Roberval, Carcavi m. fl. En yndet form var den at fremkomme med et problem som udfordring til de andre. Det er en spøg for sig at læse Mersennes evindelige undskyldninger for ikke at have haft tid til at løse Fermats gåder.

Men delvis i forbindelse med Fermats sidste sætning havde Carcavi fået nys om gåden og skyndte sig derfor at skrive til Fermat og spørge ham om en løsning først. Det svarede Fermat venligt på i august 1659, men dette brev er desværre gået tabt. Heldigvis sendte Fermat en kopi af brevet, dateret 14. august 1659, til Huygens, som selv skrev det af. Så i denne afskrift af en kopi af et brev har vi Fermats eget bevis for sætningen for $n = 4$, det var desværre kun dette specialtilfælde, der var spurgt om.

Da Fermat læste Diophants *Arithmetica,* i 1658–59 skrev han forskellige bemærkninger i marginen, f. eks. beklagelser over, at marginen var for smal til hans beviser. Denne bemærkning står også sammen med påstanden om umuligheden af at opfylde (1). I kommentaren til Diophants spørgsmål nr. 8 i bind 2 i Bachets oversættelse (til latin):

> Propositum quadratum dividere in duos quadratos

på dansk: Emnet at dele et kvadrat i to kvadrater,

skriver Fermat følgende berømte stykke:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere : cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

På dansk: Men hverken en trediepotens i to trediepotenser, eller et dobbeltkvadrat (fjerdepotens) i to dobbeltkvadrater, og i almindelighed ingen potens i det uendelige udover kvadratet kan deles i to med samme benævnelse : jeg har opdaget et virkeligt forunderligt bevis for den ting. På grund af sin lidenhed rummer denne margin det ikke.

Da man efter hans død udgav hans kommentarer, gav det

anledning til en række forsøg på at bevise alle påstandene. Især har Euler og Lagrange bevist mange af de vanskeligste. F. eks. har Euler bevist (1) for $n = 3$ og for $n = 4$ (1737). Det er også herfra betegnelsen "sidste" stammer, det var den sidste af Fermats sætninger, der endnu ikke var bevist.

Men det famøse brev handler desværre ikke direkte om den sidste sætning. I kommentaren til Diophants problem nr. 20 i Bachets oversættelse (til latin):

> Invenire triangulum rectangulum, cujus area sit datus numerus.

På dansk: At finde en retvinklet trekant, hvis areal er et givet tal.

skrev Fermat:

> Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus.

På dansk: En retvinklet trekants areal kan ikke være et kvadrat i tal.

Han underforstår naturligvis, at trekanten har heltallige sider. Det var netop et af spørgsmålene, som Carcavi fik svar på. Og det spørgsmål hænger sammen med (1) for $n = 4$.

For at se sammenhængen og forstå beviset må vi lige få en bedre fortrolighed med Pythagoras. (I sætningen betyder ordet *primisk* om et par af tal, at de to tal ikke har nogen fælles (prim)faktor.) Vi har fra Euklid:

EUKLIDS PYTHAGORÆISKE TALSÆT. *Samtlige heltalsløsninger til ligningen*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

er multipla af talsættene

$$(x, y, z) = (2pq, p^2 - q^2, p^2 + q^2), \quad p > q \qquad (2)$$

hvor p og q er primiske af forskellig paritet.

BEVIS: Hvis x, y og z er parvis primiske, så er to af tallene ulige og et af tallene lige. Det lige tal kan ikke være z, fordi summen af to ulige kvadrater giver resten 2 ved division med 8, så denne sum kan ikke være et kvadrat. Lad x være lige, så er

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

som kan deles med 4. Så står der

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$$

Nu er faktorerne på højre side primiske, så de må hver for sig være et kvadrattal. Derfor kan vi sætte $p^2 = \frac{z+y}{2}$ og $q^2 = \frac{z-y}{2}$, og får derved (2).

Fermat generaliserer (1) til

SÆTNING. *Der findes ikke hele positive tal, x, y og z, som opfylder ligningen:*

$$x^4 + y^2 = z^4 \qquad (3)$$

Det er nu let at se, at hvis der findes en pythagoræisk trekant med kvadratisk areal, så findes der en løsning til (3). Thi arealet af en pythagoræisk trekant er ifølge (2) åbenbart

$$pq(p^2 - q^2) = pq(p + q)(p - q)$$

hvor de fire faktorer er primiske. Hvis derfor dette areal er et kvadrat, så er hver af de fire faktorer et kvadrattal. Vi kan altså finde x, z, v og w, så $p = v^2$, $q = w^2$, $p + q = z^2$ og $p - q = x^2$. Men så må jo

$$z^4 - x^4 = (p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq = 4v^2w^2 = (2vw)^2$$

som åbenbart løser (3) med $y = 2vw$. Når Fermat derfor viser umuligheden af (3), har han samtidig vist sin citerede sætning om trekanter. Hans bevis går som følger:

BEVIS: Vi tænker os, at ligningen har løsninger. Vi ser på én af dem, hvor de tre tal er parvis primiske. Ligningen skriver vi i stedet

$$y^2 = z^4 - x^4 = (z + x)(z - x)(z^2 + x^2)$$

Hvis x og z begge er ulige, sætter vi $p = \frac{z+x}{2}$ og $q = \frac{z-x}{2}$. Ellers sætter vi $p = z + x$ og $q = z - x$. I begge tilfælde er p og q primiske. Vi får nu henholdsvis

$$2pq(p^2 + q^2) = \begin{cases} (\frac{y}{2})^2 \\ (2y)^2 \end{cases} \qquad (4)$$

i alle fald et kvadrattal. Men p og q kan ikke begge være ulige, for da giver $p^2 + q^2$ resten 2 ved division med 8, og så kan $2(p^2 + q^2)$ ikke være et kvadrattal. Derfor har p og q forskellig paritet. Da (4) er symmetrisk i p og q, kan vi antage, at p er et lige tal. Så må vi kunne finde r, s og t, så at

$$2p = r^2, \qquad q = s^2, \qquad p^2 + q^2 = t^2$$

Den sidste ligning er jo Pythagoras, så ifølge Euklid har vi to tal, u og v, så at

$$p = 2uv \qquad q = u^2 - v^2 \qquad t = u^2 + v^2$$

Da $r^2 = 2p = 4uv$ må u og v hver for sig være kvadrattal, $u = z_1^2$ og $v = x_1^2$. Altså får vi med $s = y_1$ af $q = s^2$ og $q = u^2 - v^2$, at

$$y_1^2 = z_1^4 - x_1^4$$

Med andre ord, en ny løsning til (3), men med $z_1 < z$. Da vi jo ikke kan blive ved med at finde mindre løsninger med positive hele tal, kan der ikke eksistere nogen løsninger overhovedet.

Denne form for induktionsbevis skyldes netop Fermat, som kaldte den *descente infinie,* (uendelig nedstigen), og er i virkeligheden hans største bidrag til matematikken.

Langt større end de resultater, Fermat fandt ved dens hjælp!

Euler kendte ikke brevet til Carcavi, men nok descente infinie! Da han ville vise Fermats sætning for $n = 4$, fandt han på en anden generalisation. Læg mærke til, at den lille generalisation i (3) er en væsentlig hjælp. For at få et induktionsbevis til at fungere, er det nødvendigt, at sætningen er stærk nok til at bære induktionsslutningen. Havde vi kun haft Fermats oprindelige form, (1), ville vi have sluttet for lidt. Tilsvarende gælder for Eulers nok så elegante bevis.

EULERS SÆTNING. *Der findes ikke hele positive tal, x, y og z, som opfylder ligningen:*

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{5}$$

BEVIS: Antag, at vi har en løsning med parvis primiske tal. Af Euklids sætning anvendt på (3) får vi, at der findes p og q, så $x^2 = 2pq$, $y^2 = p^2 - q^2$ og $z = p^2 + q^2$. Af

$$p^2 = y^2 + q^2$$

får vi igen fra Euklid, at der findes s og t, så $p = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$ og $q = 2st$. Altså er

$$x^2 = 2pq = 2(s^2 + t^2)2st$$

som kan deles med 4 til

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = st(s^2 + t^2)$$

De tre faktorer er parvis primiske, så de er hver for sig kvadrattal. Altså, $s = x_1^2$, $t = y_1^2$ og $s^2 + t^2 = z_1^2$. Tilsammen fås:

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$$

Og da $z_1 < z$ følger sætningen ved descente infinie.

Selv om Fermats sidste sætning nu er "trivialiseret," så er der stadig håb for den geniale amatør. Wiles' uendeligt lange og komplicerede bevis, der bruger alt, hvad man kunne tænke sig, og endnu mere, som man aldrig havde drømt om i den sammenhæng, efterlyser et kort elegant bevis i stil med Fermats og Eulers. Helt analogt til det meget mindre eksempel, 4–farveproblemet, hvis løsning afhang af en umådeholden brug af computeranalyser. Man efterlyser stadig et overbevisende enkelt ræsonnement, der bare rammer sømmet på hovedet.

I Fermats tilfælde vil romantikerne sige: Vi mangler at genopdage hans eget ræsonnement. Det "virkeligt forunderlige bevis," der blot var lidt for stort til at stå i marginen! Selv for $n = 3$ er Fermats bevis en uløst gåde. Eulers bevis involverer komplekse tal på en måde, der næppe var til Fermats rådighed. Så der er håb for amatører, der kan genfinde Fermats eget bevis for $n = 3$ og dermed måske nøglen til den almindelige sætning.