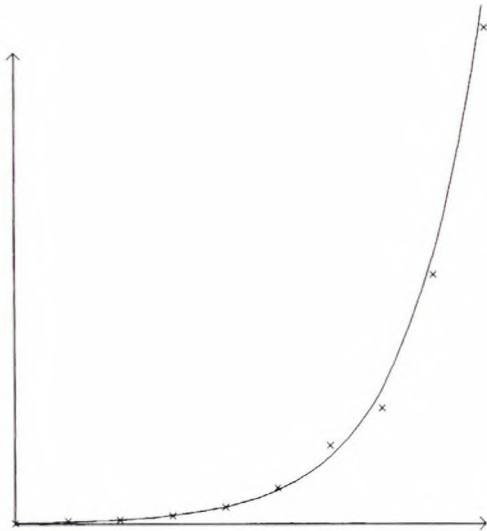
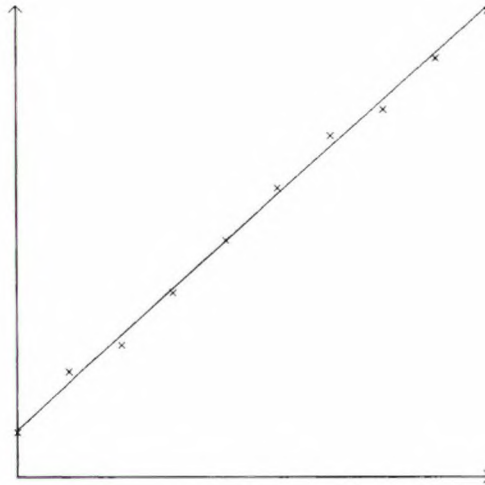


Ubegrænset vækst

Mogens Esrom Larsen, Matematisk institut, Københavns Universitet.



En vanskelig funktion at bestemme



Funktionens logaritme

Iagttagelser fra et eksperiment

Vækst behøver ikke være begrænset, men prisen for ubegrænset vækst er, at jo hurtigere det går, jo mindre stabil er opførslen.

Iagttagelse af vækst

Sæt, at vi foretager en række observationer, dvs. samtidige aflæsninger af to måleinstrumenter, f. eks. et termometer og et ur. Vi afbilder iagttagelserne i en plan med en temperaturakse og en tidsakse og kigger på punkterne. Spørgsmålet er, ser de ud til at ligge på en pæn funktion, f. eks. en ret linie? Eller, hvis de ikke gør det, kan vi så få dem til det ved en simpel transformation, f. eks. ved at tage logaritmerne til den ene variabel? Figuren viser et eksempel på genkendelse af en eksponentialfunktion.

Beskrivelse af vækst

Sæt, at vi har fundet en funktion, $x = \varphi(t)$, som vi synes ser ud til at beskrive iagttagelserne nogenlunde. Vi har så valgt en pæn funktion, dvs. differentiabel. Hvis vi har iagttaget et vækstfænomen, så har vi nok valgt funktionen voksende. Vi gør nu denne funktion til en model for det fænomen, vi har iagttaget et eksempel på. Det gør vi ved at antage, at ved en gentagelse af eksperimentet vil de nye iagttagelser ligne de gamle. Dvs., at vi kan beskrive næste eksperiment ved samme funktion, blot med et nyt starttidspunkt, altså som $x = \varphi(t + \tau)$, hvor τ er tidsforskydningen. Vores teori er altså, at dette fænomen kan beskrives med en af vores modelfunktioner fra familien $x = \varphi(t + \tau) \quad \tau \in R$. Hvis fænomenet er et

vækstfænomen, har vi valgt grundfunktionen voksende. Vi har altså en familie af voksende differentiable funktioner til beskrivelse af dette fænomen.

Vækstens hastighed

At en funktion vokser, kan aflæses af dens differentialkvotient. Funktionen er voksende, hvis og kun hvis differentialkvotienten aldrig er negativ. Men selv om vi ser, at differentialkvotienten altid er positiv, kan funktionen selv godt nøjes med at vokse under et fast loft. Hvis det er tilfældet, kalder vi væksten for *begrænset*, ellers *ubegrænset*.

Men blandt de ubegrænsede funktioner vil vi skelne mellem, hvor hurtigt de vokser mod uendelig. En eksponentialfunktion vokser nu engang væsentlig hurtigere end en ret linie. Derfor indfører vi i tabel 1, følgende vækstbegreber, der er specialiserende: For hvert trin gælder, at klassen af kraftigt voksende funktioner er en underklasse af klassen af svagt voksende funktioner, på nær klassen af funktioner med eksplosiv vækst.

Stabilitet

Sæt, at vi har valgt funktionen $x = \varphi(t)$ begrænset. Da den er voksende, betyder det, at væksten nærmer sig et loft, når tiden går mod uendelig. Dette loft er uafhængigt af τ , så hele familien har samme loft. Efter en vis tid, som afhænger af τ , vil vi være $< \epsilon$ fra loftet, hvis vi har valgt et mål, $\epsilon > 0$ for, hvor tæt vi vil være tilfredse med at være kommet. Det fænomen, at alle funktionerne i fa-

J:	Vækstform	definition
I.	Ubegrænset	hvis $\varphi'(t) > 0$ for alle t , og $\varphi(t) \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$
II.	Lineær	hvis $\varphi'(t) > \epsilon > 0$ for alle t .
III.	Polynomiel	hvis $\varphi'(t) \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$
IV.	Eksponential	hvis $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} > \epsilon > 0$ for alle t .
V.	Hyper-eksponentiel	hvis $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$
VI.	Dobbelt-eksponentiel	hvis $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) \ln \varphi(t)} > \epsilon > 0$ for alle t .
VII.	Eksplisiv	hvis $\varphi'(t) > 0$ for alle t , og $\varphi(t) \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow T < \infty$

Tabel 1.

milien går mod én og samme grænseværdi for $t \rightarrow \infty$ kalder vi *asymptotisk stabilitet*. Vi siger altså, at familien er asymptotisk stabil.

Specielt gælder, at for $\epsilon > 0$ vil to funktioner fra familien efter en vis tid opfylde, at $\varphi(t + \tau_1) - \varphi(t + \tau_2) < \epsilon$. Denne egenskab kan imidlertid godt være opfyldt, selv om funktionerne i familien alle vokser mod uendelig. Ubegrænsede funktioner kan altså udvise en stabilitet, der er ganske på linie med den, de begrænsede funktioner kan præstere. Men de ubegrænsede funktioner kan også udvise forskellige svagere former for stabilitet. I tabel 2 giver vi en række stabilitetsdefinitioner, der er generaliserende. For hvert trin i stabilitetsrækken, vil vi finde flere funktioner, der opfører sig stabilt, undtagen for klassen af helt ustabile funktionsfamilier. Når stabiliteterne 3. og 4. kaldes relative, skyldes det, at 3. betyder, at $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow 1$ for $t \rightarrow \infty$.

Stabilitet af en eller anden form er uhyre vigtig for en model. Når vi har den teori, at fænomener opfører sig som beskrevet af en funktion fra familien, er det værdiløst, hvis det er afgørende, præcis hvilken funktion vi vælger at gætte på. Hvis derimod funktionens opførsel i det lange løb er ensartet for den og dens naboer i familien, så kan vi stole på de konklusioner, vi drager.

Dette er netop den modsatte situation af den kaotiske, hvor selv nok så nærtstående naboer opfører sig totalt forskelligt.

Komplementaritet

Hvad skal vi med alle disse definitioner, hvorfor tager vi ikke bare en model med den eksponentielle vækst og den absolutte stabilitet? Fordi det nærmest er umuligt! Der gælder for familier af den form, vi betragter her, altså af formen $\Phi = \{\varphi(t + \tau) | \tau \in R\}$ følgende:

Hovedsætning. Hvis den voksende og differentiable funktion $x = \varphi(t)$ vokser så kraftigt som $J \in \{I, II, \dots, VII\}$, så vil to forskellige funktioner fra familien Φ , $x = \varphi(t)$ og $x = \varphi(t + \tau)$, ikke kunne udvise en stabilitet, der er stærkere end j .

Med andre ord, vækst og stabilitet modarbejder hinanden på modelplanet. Er væksten blot så kraftig som lineær, så er stærkt absolut stabilitet udelukket. Og omvendt, har vi en stærkt absolut stabilitet, så er en vækst stå kraftigt som lineær udelukket! Etc.

Lad mig illustrere denne komplementaritet med nogle typiske eksempler. I tabel 3 er tillige anført, hvilken simpel differentialligning, de nævnte funktioner løser.

Differentialligningen for en familie

En familie af funktioner differentialkvotient $\Phi = \{\varphi(t + \tau) | \tau \in R\}$ kan også beskrives som løsningsmængden til en bestemt differentialligning.

Vi sætter $y = f(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(x))$ og med denne definition er Φ netop løsningsmængden til differentialligningen $\dot{x} = f(x)$

Fortsættes side 29.

j:	Stabilitet	definition
1.	Stærkt absolut	hvis $\varphi(t) - \psi(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$
2.	Svagt absolut	hvis $ \varphi(t) - \psi(t) < k < \infty$ for alle t
3.	Stærkt relativ	hvis $\ln \varphi(t) - \ln \psi(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$
4.	Svagt relativ	hvis $ \ln \varphi(t) - \ln \psi(t) < k < \infty$ for alle t
5.	Stærkt logaritmisk	hvis $\ln \ln \varphi(t) - \ln \ln \psi(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$
6.	Svagt logaritmisk	hvis $ \ln \ln \varphi(t) - \ln \ln \psi(t) < k < \infty$ for alle t
7.	Ustabil	hvis $\varphi(t) - \psi(t) \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow T < \infty$

Tabel 2.

Differential-ligning	Funktion	Vækst	Stabilitet
$\dot{y} = y^{-1}$	$\sqrt{2t}$	ubegrænset	stærkt abs. men ikke asymptotisk
$\dot{y} = 1$	t	lineær	svagt abs. men ikke stærkt abs.
$\dot{y} = 2\sqrt{y}$	t^2	polynomiell	stærkt rel. men ikke svagt abs.
$\dot{y} = y$	e^t	eksponentiel	svagt rel. men ikke stærkt rel.
$\dot{y} = y\sqrt{\ln y}$	$e^{(t^2)}$	hypereksp.	stærkt log. men ikke svagt rel.
$\dot{y} = y \ln y$	$e^{(e^t)}$	dobbelteksp.	svagt log. men ikke stærkt log.
$\dot{y} = y^2$	$-t^{-1}$	eksplosiv	ustabil men ikke svagt log.

Tabel 3: Vækst kontra stabilitet

..fortsat fra side 25.

Thi f er en positiv funktion, der er defineret på billedmængden for φ , og vi har åbenbart, at

$$\varphi'(t) = \varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(t))) = f(\varphi(t))$$

På den anden side gælder, at differentialligningen løses ved udregning af

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t + \tau$$

Ved substitutionen $x = \varphi(y)$ giver integralet

$$\int \frac{\varphi'(y)dy}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(y)))} = y = \varphi^{-1}(x)$$

altså, at

$$x = \varphi(t + \tau)$$

er samtlige løsninger.

Denne beskrivelse tillader os at vise, at der mangler stabilitet. Vækstens hastighed siger noget om φ' , som igen siger noget om f . Og f siger noget om, hvordan løsningerne opfører sig med hensyn til stabilitet.

Absolut stabilitet. Vi betragter differensen mellem to familiemedlemmer fra Φ :

$$\varphi(t + \tau) - \varphi(t)$$

Det er ingen indskrænkning at antage, at $\tau > 0$.

Middelværdisætningen siger, at vi kan regne således:

$$\varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \varphi'(t + \xi(t))\tau = f(\varphi(t + \xi(t)))\tau$$

hvor vi ved, at $0 < \xi(t) < \tau$.

Vi ved, at $\varphi(t) \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$. Så vi kan aflæse to resultater:

1) Hvis $f(x) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, så vil $\varphi(t + \tau) - \varphi(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

2) Hvis $f(x) > \epsilon > 0$ for alle x , så vil $\varphi(t + \tau) - \varphi(t) > \epsilon\tau > 0$ for alle t .

Det sidste resultat viser hovedsætningen for $J = II, III, j = 1, 2$.

Resten af hovedsætningen fås ved et simpelt trick: Når $\varphi(t)$ løser differentialligningen

$$\dot{x} = f(x)$$

så vil $\ln \varphi(t)$ løse differentialligningen

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{x}$$

Vi får jo

$$\frac{d \ln \varphi(t)}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{f(x)}{x}$$

Anvendelse af 1) og 2) ovenfor giver hovedsætningen for $J = IV, V, j = 3, 4$.

Det næste resultat fås ved at indse, at $\ln \ln \varphi(t)$ løser differentialligningen

$$\dot{x} = \frac{f(x)}{x \ln x}$$

og det sidste er umiddelbart.

Resumé

Hvis en model for et vækstfænomen gives ved en bestemt funktion og dennes forskydninger,

$$\Phi = \{\varphi(t + \tau) | \tau \in R\}$$

hvilket blot er at sige, at væksten er autonom eller uafhængig af tidsafhængige påvirkninger, så er denne familie af vækstfunktioner netop løsningsmængden til differentialligningen

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{hvor} \quad f(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(x)).$$

Hvis derfor væksten er kraftig, betyder det, at $\varphi'(t)$ er stor, og dermed at $f(x)$ er stor, hvilket medfører, at løsningsmængden – og dermed modelfamilien – kun har begrænset stabilitet. Og omvendt betyder det, at hvis stabiliteten er god, så må væksten være svag. Men, selv om stabiliteten er stærkt absolut, så kan væksten godt være ubegrænset, selv om den er langsom!