

# Kunsten at vælge

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Når en forsamling skal enes om den ene af to forelagte muligheder, så kan man spørge hver enkelt om, hvilken han eller hun foretrækker. Den mulighed, som foretrækkes af et flertal, kan så siges at være forsamlingens valg.

Denne simple situation med den oplagte demokratiske afgørelse står som et ideal. Hvordan kan man generalisere metoden til mere indviklede situationer?

Hvis man skal gå skridtvis frem, må man først se på situationen, at der skal vælges én blandt tre eller flere muligheder. Dernæst at der skal vælges flere blandt mange muligheder. Den sidste situation kan igen deles op i flere, alt efter om de valgte skal repræsentere forsamlingens synspunkter eller udgøre et samlet hele.

## Arrow's umulighedssætning

Lad os tænke os en forsamling, der skal vælge én ud af et antal muligheder. Hver enkelt har en præference, dvs. en rækkefølge, som han eller hun vil foretrække mulighederne i. Vi foretager nu en udregning af en "gennemsnitsrækkefølge," som er forsamlingens præference. Kenneth J. Arrow foreslog i 1951, at man skulle forlange, at denne gennemsnitsrækkefølge skulle opfylde nogle rimelige krav.

F. eks. kunne man forlange, at gennemsnittet opfyldte følgende tre:

- 1) *At funktionen er "voksende."* Dvs., at hvis en af vælgerne bytter om på to muligheder i sin præference, så skal slutresultatet ikke stille den oprykkede mulighed lavere.
- 2) *At funktionen ikke lader sig "distrahere" af ligegyldige forhold.* Dvs., at hvis vi blot fjerner en enkelt mulighed fra samtlige vælgerpræferencer, så skal slutresultatet blot ændres ved, at denne mulighed fjernes, mens rækkefølgen af de tilbageværende bevares.
- 3) *At funktionen er "demokratisk."* Dvs., at hvis vi ombytter stemmesedlerne mellem vælgerne, så skal slutresultatet forblive uændret.

Arrow indså, at disse krav skyder langt over målet; ja, selv om han svækkede 3) betydeligt, var der ingen procedure, der tilfredsstillte betingelserne.

At vi har været grådige i vort forlangende, fremgår af et simpelt eksempel. Antag, at 9 vælgere skal vælge mellem 3 muligheder, A, B og C, og at de fordeler stemmerne som følger:

Antal stemmer	4	3	2
1. prioritet	A	B	C
2. prioritet	B	C	A
3. prioritet	C	A	B

Det er klart, at ingen metode kan tilfredsstille 2), fordi A foretrækkes for B af et flertal på 6, B foretrækkes for C af et flertal på 7 og C foretrækkes for A af et flertal på 5. (Af 1) og 2) følger, at flertallets valg blandt 2 skal følges.)

Dette simple eksempel er hovedproblemet. Hvis en forsamling præfererer på denne måde, har man en "cyklisk majoritet." Det er en ubehagelig kendsgerning.

## Nanson's metode

Hvis man derfor skal vælge en rimelig præferencemetode, må man stille nogle mere beskedne krav!

Et sådant krav kunne være

- 4) *At funktionen respekterer et klart flertal.* Dvs., at hvis en mulighed foretrækkes af et flertal for enhver anden, så skal denne mulighed vælges.

Dette flertal behøver ikke at bestå af de samme vælgere ved hver parvis sammenligning af muligheder. Hvis vi f. eks. i eksemplet ovenfor indfører muligheden D som 2. prioritet hos alle 9 vælgere, så vil D foretrækkes af et flertal ved enhver sammenligning af 2. F. eks. vil D vinde over A med 5 stemmer mod 4.

En simpel metode, der har egenskaberne 3) og 4) er følgende: Vi antager, at der er  $n$  muligheder at vælge imellem. Nu giver hver vælger sin første prioritet  $n-1$  stemmer, sin anden prioritet  $n-2$  stemmer, osv., ned til sidste prioritet, der får 0 stemmer. Hver mulighed får derved et antal stemmer, og den mulighed, der har fået færrest stemmer, går ud. Proceduren gentages nu med de  $n-1$  resterende muligheder, idet den udgåede stryges af samtlige stemmesedler. Når der kun er én mulighed tilbage, er denne valgt.

Der afgives af  $m$  vælgere på  $n$  muligheder ialt  $m \cdot n(n-1)/2$  stemmer. Det er  $m \cdot (n-1)/2$  stemmer pr. mulighed. En mulighed, der foretrækkes af et flertal for enhver anden, må rangere højere end hver af de  $n-1$  andre muligheder på mere end  $m/2$  stemmesedler. Derfor må denne mulighed få mere end  $(n-1) \cdot m/2$  stemmer, altså mere end gennemsnittet. Den får altså ikke det mindste antal stemmer og går derfor ikke ud. Men når muligheden overlever hvert fravalg, står den tilbage til sidst.

Nanson's metode har ikke egenskaberne 1) og 2). Som et eksempel kan vi se på fordelingen af 32 stemmer på tre kandidater A, B og C som følger:

Antal stemmer	10	1	1	10	10
1. prioritet	A	A	B	B	C
2. prioritet	B	C	A	C	A
3. prioritet	C	B	C	A	B

I første omgang får A, B og C hhv. 33, 32 og 31 stemmer. Derfor går C ud, og i anden omgang vinder A over B med 21 stemmer mod 11.

Men lad os nu ændre stemmesedlen B A C til A C B, hvorved A ikke er stillet ringere. Så får A 34, B 30 og C 32 stemmer, så nu går B ud. Derefter vinder C over A med 20 stemmer mod 12.

### Forholdstalsvalg

Vi går nu over til at betragte den mere komplicerede situation, at forsamlingen skal vælge mere end én kandidat blandt de  $n$  opstillede. Her kunne man ønske, at de valgte kandidater repræsenterede forsamlingens synspunkter i en eller anden forstand. Hvis f. eks. halvdelen af vælgerne har en bestemt opfattelse af et spørgsmål, så kunne man ønske sig, at halvdelen af de valgte havde samme mening. For at opnå dette, må man vælge sin anden prioritet efter to synspunkter, nemlig, hvem kan erstatte min første prioritet, hvis denne ikke bliver valgt, og hvem kan supplere min første prioritet, hvis denne bliver valgt. Det kan måske lade sig gøre ved valg af personer til bestyrelser o. lign., men ved valg mellem andre typer af muligheder kan det let være modstridende hensyn. Ved valg af én mulighed, er det kun erstatningssynspunktet, der er relevant.

Ved folketingsvalg og lignende, er det supplerings-synspunktet, der er afgørende. En løsning består i, at kandidaterne går sammen i partier, der ikke må have kandidater fælles. Valgproceduren giver nu som resultat, hvor mange, der skal vælges fra hver liste. Disse supplerer nu hinanden i det omfang, der er tilslutning i vælgerbefolkningen.

Lad os sige, at der er  $n$  vælgere, der stemmer på  $q$  partier om  $m$  mandater eller pladser i bestyrelsen. Det  $j$ -te parti får  $n_j$  stemmer, og derefter tildeles partiet  $m_j$  pladser, sådan at

$$m_j \approx \frac{m \cdot n_j}{n}$$

Ved folketingsvalg rundes de forekommende brøker i tallene  $(m \cdot n_j)/n$  op efter størrelse, indtil summen stemmer,  $m_1 + \dots + m_q = m$ . Det kaldes derfor "de største brøkers metode" og svarer til, at vi minimerer den maksimale forskel,  $|m_j - m \cdot n_j/n|$ .

Det ser jo rimeligt nok ud, men har konsekvenser, der ikke er det. Hvis tre partier skal dele brøkerne 0,7, 0,7 og 0,6 med sum 2, så får de første to hver én. Men slår de sig sammen til ét parti, så får de 1,4 mod 0,6, så nu må de sammenlagte partier nøjes med én tilsammen.

Hvis man forlanger af en valgmetode, at den skal være uafhængig af ombytninger af vælgere eller partier, og at proportionale stemmetal skal udløse samme resultat, og dertil følger kravene:

- I) *Et større parti må ikke få færre mandater end et mindre.*
- II) *Et parti må ikke vinde ved deling og højst tabe ét mandat ved deling i to.*
- III) *To partier må ikke tabe ved sammenlægning og højst vinde ét mandat derved.*

Så er der en éntydig bestemt valgmetode, der løser problemet. Metoden kaldes d'Honts metode og blev foreslået af den belgiske jurist Victor d'Hont i 1878. Karakteristikken er fundet af A. K. Erlang i 1907.

Givet stemmetallene  $n_1, \dots, n_q$  og mandattallet  $m$  vælges  $m_1, \dots, m_q$  således, at det største af tallene

$$\frac{n_j}{m_j + 1}, \quad j = 1, \dots, q$$

bliver mindst muligt.

Det fungerer simpelthen sådan: Vi skriver for hvert  $j$  talrækken

$$(*) \quad \frac{n_j}{1}, \frac{n_j}{2}, \frac{n_j}{3}, \dots$$

Blandt samtlige forekommende tal for alle  $j$  udtages de  $m$  største. Antallet af udtagne tal i rækken (\*) er mandattallet for partiet  $j$ .

At to partier ikke kan tabe ved sammenlægning, følger af, at af

$$\frac{n_1}{m_1} \leq \frac{n_2}{m_2}$$

fås

$$\frac{n_1}{m_1} \leq \frac{n_1 + n_2}{m_1 + m_2} \leq \frac{n_2}{m_2}$$

De første  $m_1 + m_2$  brøker i den ny række kan hævde sig over for de andre partiers.

Og de to partier kan ikke vinde mere end ét mandat. For af

$$\frac{n_1}{m_1+1} \leq \frac{n_2}{m_2+1}$$

fås

$$\frac{n_1}{m_1+1} \leq \frac{n_1+n_2}{m_1+m_2+2} \leq \frac{n_2}{m_2+1}$$

så denne brøk er for lille, når de andre er det. Det ny parti kan højst få  $m_1 + m_2 + 1$  mandater.

Det mindste antal mandater, et parti kan få ved d'Honts metode, er det antal, som fås, når resten af partierne går sammen til ét. Dvs., at partiet får  $m_1$  mandater, hvor

$$\frac{n_1}{m_1+1} \leq \frac{n-n_1}{m-m_1} \text{ og } \frac{n-n_1}{m-m_1+1} \leq \frac{n_1}{m_1}$$

hvoraf

$$n_1 \cdot \frac{m+1}{n} - 1 \leq m_1 \leq n_1 \cdot \frac{m+1}{n}$$

Heraf fås, at

$$\frac{n_1}{m_1+1} \leq \frac{n}{m+1} < \frac{n_1}{m_1}$$

Grænsen  $n/(m+1)$  kaldes "forholdstallet" og den har lagt navn til metoderne.

### Andræ's metode

I den omsiggribende demokratiseringsproces efter revolutionen i 1848 ville man indføre det repræsentative parlament flere steder i Europa. I England var først Thomas Hare i 1857 og snart efter John Stuart Mill i 1861 varme fortalere for et repræsentativt parlament, en tanke, der som bekendt aldrig vandt politisk gehør på øerne. Men allerede i 1855 formulerede den danske konceilspræsident, C. C. G. Andræ, i et lovforslag en meget lignende metode.

Deres metoder har end ikke egenskaben 3). Men de indeholder en interessant idé. Man tager forholdstallet, som det er defineret ovenfor. Derefter tager man stemmesedlerne og lægger dem i bunker efter den først nævnte kandidat. Når en kandidat på denne måde har fået flere stemmer end forholdstallet, lægges disse sedler til side, mens kandidaten får status af valgt. Når man på de følgende stemmesedler møder navnet på en således valgt kandidat, lægges stemmesedlen i bunken med navnet på den næste kandidat på sedlen. Det er idéen, at der ikke skal betales mere end forholdstallet for at få en kandidat valgt.

### En hybrid af Andræ's og d'Honts metoder

Spørgsmålet er nu, om man kan få de bedste af de foregående metoders egenskaber til at gå op i en højere enhed. Det kan man faktisk godt.

Lad os fastholde egenskaben 3), men lad os generalisere egenskaben 4), så den ligner listevalgets minimalkrav. Vi tænker os altså, at der er  $n$  vælgere og  $k$  kandidater, og at en valgproceduren skal give en ordning af de  $k$  kandidater, så vi kan tage et hvilket som helst antal  $m$ ,  $1 \leq m \leq k$  ud fra begyndelsen og få en repræsentativ bestyrelse af den størrelse. Vi kalder den  $F$  for forholdstalsegenskaben:

- F) Hvis  $n_1$  vælgere foretrækker de samme  $h$  kandidater for alle de øvrige, så skal det gælde for ethvert  $m < k$ , at hvis  $m_1 \leq h$  opfylder

$$n_1 > m_1 \cdot \frac{n}{m+1}$$

så skal der være mindst  $m_1$  af disse  $h$  kandidater blandt de  $m$  første i valgresultatet.

Det er svagere end 4) derved, at der skal være enighed i gruppen. Egenskaben generaliserer den egenskab, at hvis  $n_1$  vælgere stemmer på en og samme liste, så vil denne liste få valgt mindst  $m_1$  ud af  $m$ .

For at opnå egenskaben F) bemærkes, at hvis vi har en metode, der har egenskaben F) i specialtilfældet  $m = k-1$ , så vil den metode, der består i en gentagelse af den specielle for faldende værdier af  $k$  ved elimination af kandidaterne én efter én på samme måde som Nanson's metode, også have egenskaben F), nu for alle værdier af  $m$ .

Det følger af, at er

$$n_1 > m_1 \cdot \frac{n}{m+1}$$

så er også

$$n_1 > m_1 \cdot \frac{n}{k}$$

En metode, der tilfredsstiller F) og 3) for  $m = k-1$  fås ved at modificere Andræ's ide. Vi giver hver vælger en stemmevægt, der fra begyndelsen sættes til 1. Nu tæller vi sammen for hver kandidat, hvor mange stemmer, der har kandidaten som øverste prioritet. I almindelighed er det summen af vægtene af de stemmer, der har kandidaten som øverste prioritet. Hvis denne samlede stemmevægt overstiger forholdstallet,  $n/k$ , i almindelighed den samlede sum af stemmernes vægte delt med  $k$ , så anses kandidaten for valgt. Kandidatens samlede stemmevægt fratrækkes denne pris,  $n/k$ , hvorved der bliver en rest, et overskud. Dette overskud fordeles til de vælgere, der har bidraget til kandidatens valg, i forhold til den vægt, de enkelte vælgere har bidraget med. Disse stemmesedler med deres nye vægte bidrager nu til den samlede stemmesum for de kandidater, der endnu ikke er blevet valgt. Hver enkelt stemmeseddels vægt tilfalder den

øverst nævnte kandidat, som endnu er på valg. Hver gang vil der blive valgt mindst én kandidat, da de bliver valgt, som har flere stemmer end gennemsnittet. Når der er valgt  $k-1$ , bliver den sidste fravalgt og proceduren er slut.

At proceduren har egenskaben F) følger af, at for  $k = m+1$  er F) kun tvivlsom, når  $h = m_1$ . I dette tilfælde får hver af disse  $m_1$  før eller siden mindst  $n_1/m_1 > n/k$  stemmer, så ingen af dem bliver fravalgt.

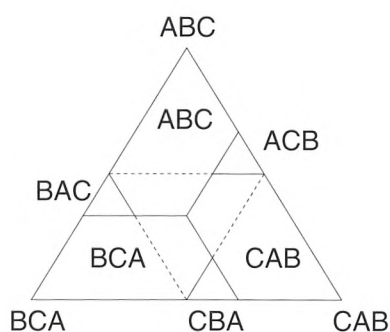
Denne metode er en generalisation af d'Honts metode. Hvis vælgerne stemmer på den måde, at de i store grupper stemmer på lister, dvs. på den samme gruppe af kandidater, og sådan, at disse grupper af kandidater ikke har nogen fælles, så vil resultatet af denne procedure blive det samme som d'Honts.

### Et eksempel

Nu så vi i begyndelsen at fænomenet cyklisk majoritet var et teoretisk hovedproblem for en valgmetode. Lad os derfor tænke os, at vi har nogle vælgere, der deler sig i tre grupper med henholdsvis  $n_1$ ,  $n_2$  og  $n_3$  medlemmer. De stemmer på tre kandidater i rækkefølge:

Antal stemmer	$n_1$	$n_2$	$n_3$
1. prioritet	A	B	C
2. prioritet	B	C	A
3. prioritet	C	A	B

Vi kan illustrere valgmetodens resultater ved at tegne en trekant i rummet udsprængt af de tre vektorer  $(n_1, 0, 0)$ ,  $(0, n_2, 0)$  og  $(0, 0, n_3)$ . Trekanten er den positive oktants snit med planen  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ . En afstemning giver altså anledning til et punkt i denne plan, og i planen vil der være seks delmængder, der svarer til de seks mulige valgresultater. De fordeler sig som følger:



Området med cyklisk majoritet er den kvarte trekant på spidsen i midten af figuren.

### Historie

Da den demokratiske styrelseslov blev indført på universiteterne i 1971, foreslog jeg den sidstnævnte metode til brug ved bestyrelsesvalget på Københavns Universitets Matematiske Institut. Vi vedtog at benytte metoden og har gjort det lige siden.

I perioden derefter blev metoden også benyttet ved studenterrådsvalgene ved Københavns Universitet samt af Foreningen af Danske Lægestuderende. For de sidstnævnte løste metoden et nærliggende problem. Til repræsentantskabsvalget havde man hidtil benyttet d'Honts metode, men havde for skik at opstille flere lister med hver kun én kandidat. Når d'Honts metode gav en sådan liste 3 mandater, følte man valgresultatet utilfredsstillende. Ved at anvende prioritetsmetoden gav man vælgerne mulighed for at supplere en sådan kandidat med andre kandidater eller lister, hvorved valgresultatet kom til at repræsentere vælgerne bedre.

På Matematisk Institut har erfaringen været, at metoden fritager for besvær med opstilling af kandidater. Alle er altid opstillet. Metoden afhænger jo ikke af, om der er mange eller få kandidater, de uinteressante bliver siet fra og slaget står til sidst mellem dem, der faktisk har støtte i vælgerskaren. Men vi er næsten faldet i den anden grøft, idet et valg nu foregår ved uddeling og indsamling af stemmesedler uden nogen synderlig diskussion. Hvis valgresultatet så ikke er et gement genvalg, vågner folk pludselig op og tænker, hvem skulle jeg have stemt på?

Metoden har naturligvis kun kunnet anvendes med brug af elektronisk databehandling af stemmesedlerne. En pudsighed er, at man på Matematisk Institut ved Århus Universitet i 70'erne anvendte metoden som opgave i den indledende datalogiundervisning, fordi det var så nemt at se, om et program gjorde, hvad det skulle.

Uden for landets grænser har metoden vundet størst gehør i Østeuropa. For, som en gæst fra Tjekkiet bemærkede, "det kalder du *anvendt* matematik, men hos os er det *ren* matematik!" Det var ti år siden, nu bliver det måske snart omvendt?



Mogens Esrom Larsen er ansat ved Københavns Universitets matematiske institut som lektor. Medlem af redaktionen af KVANT.