Liden forskel gør et stort rod

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Überall ist das Chaos der gefährlichste Feind.
Houston Stewart Chamberlain (1855-1927)

En lineær differensligning lader sig let løse. Ligningen

$$f(n+1) = a \cdot f(n) \qquad (1)$$

omskrives til

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = a \qquad (2)$$

Ganger vi (2) for $n = 0, 1, 2, \ldots$ med hinanden, står der jo

$$\frac{f(n)}{f(0)} = \frac{f(n)}{f(n-1)} \cdot \frac{f(n-1)}{f(n-2)} \cdots \frac{f(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(1)}{f(0)} = a^n \qquad (3)$$

Der er fem mulige opførsler,
1) $a > 1$, $f(n) \to +\infty$ for $n \to \infty$
2) $a = 1$, $f(n) = 1$ for alle n
3) $-1 < a < 1$, $f(n) \to 0$ for $n \to \infty$
4) $a = -1$, $f(n)$ divergerer mellem 1 og -1
5) $a < -1$, $f(n)$ divergerer mellem $-\infty$ og ∞

Selv om differensligningen ikke er homogen, går det let:

$$g(n+1) - a g(n) = c \qquad (4)$$

har jo løsningerne

$$g(n) = \frac{c}{1-a} + \lambda \cdot a^n \quad \text{for} \quad a \neq 1 \qquad (5)$$

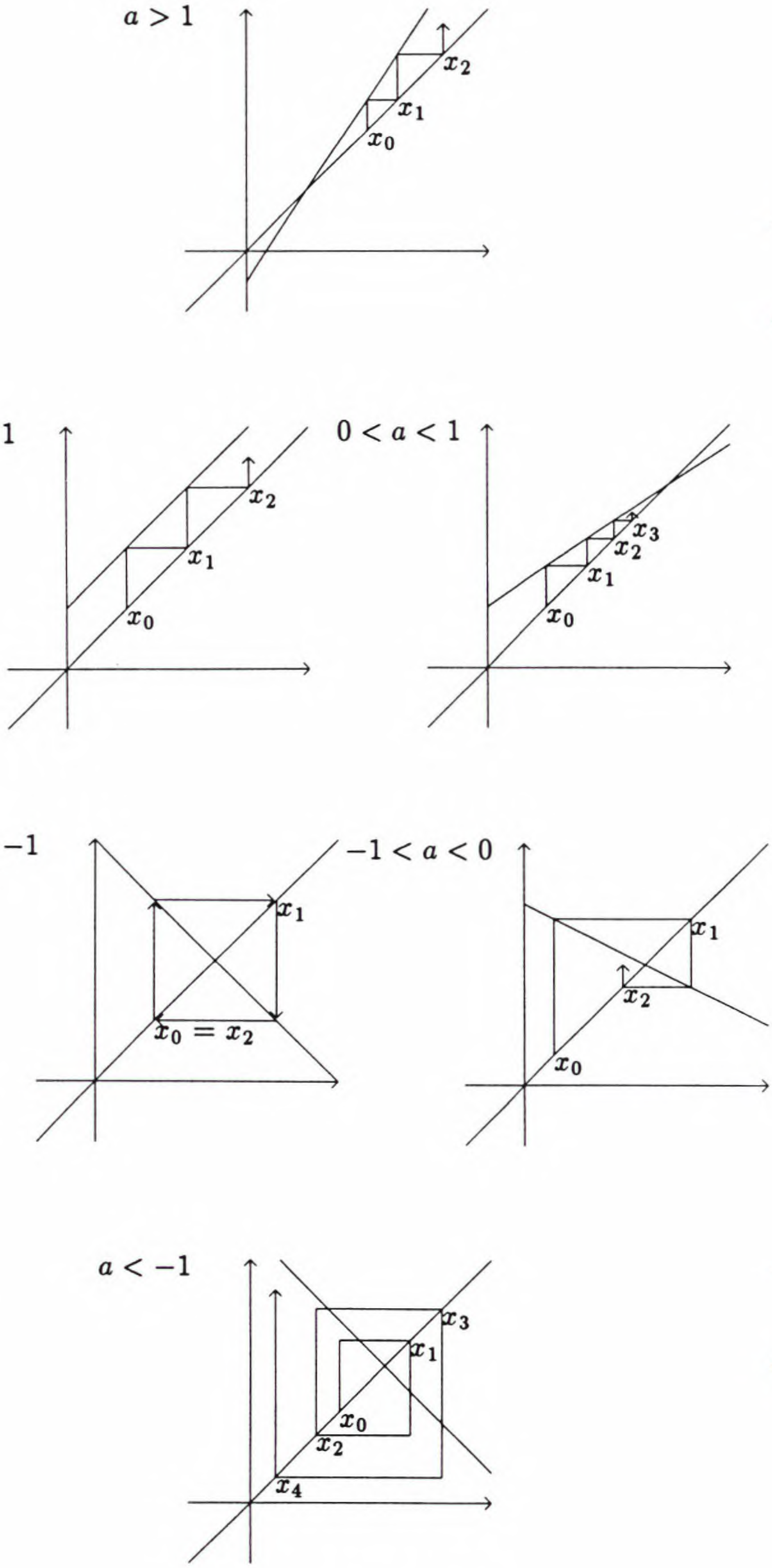
$$g(n) = n \cdot c + \lambda \quad \text{for} \quad a = 1 \qquad (6)$$

Det eneste nye er, at for $a = 1$ vil $g(n) \to \pm\infty$, afhængig af fortegnet af c.

Disse opførsler lader sig let illustrere grafisk, idet vi kan opfatte (4) som iteration af funktionen

$$y = ax + c \qquad (7)$$

Vi anbringer punkterne som (x,x) og (y,y) på linien $y=x$. Iterationen af (7) eller følgen (4) ser da således ud:



Figur 1. Iteration af lineær funktion.

Vi iagttager, at konstanten c er uden betydning, mens a styrer forløbet. Hvis vi ændrer på a, sker der en afgørende forandring af opførslen, når a passerer 1 og -1. Sådanne forandringer kaldes ''katastrofer''. Men ingen af de viste adfærd er kaotisk.

En ikke-lineær differensligning lader sig ikke så tit løse eksplicit à la (2) eller (5-6). Ganske vist kan ligningen for $\lambda \neq 0$

$$f(n+1) = \lambda f(n)^2 \tag{8}$$

løses af

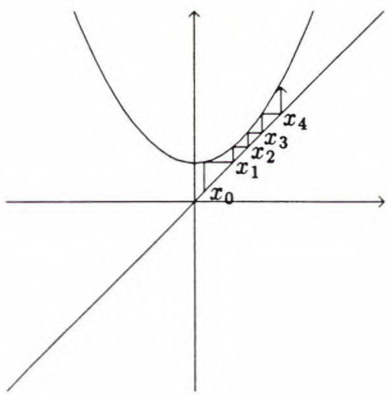
$$f(n) = \frac{1}{\lambda} a^{2^n}, \quad a = \lambda f(0) \tag{9}$$

Men fordi ligningen ikke er lineær, giver denne løsning os ikke umiddelbart en løsning til

$$f(n+1) = f(n)^2 + c \tag{10}$$

Derimod kan løsningerne illustreres på samme måde som i det lineære tilfælde ved iteration af funktionen

$$y = x^2 + c \tag{11}$$



Figur 2. Iteration af x^2+c, $c>{}^1/_4$.

I almindelighed har vi altså en funktion

$$y = F_c(x) \tag{12}$$

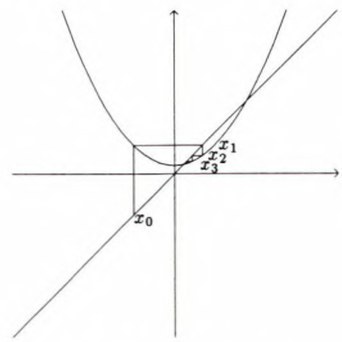
hvor c er en parameter og x en variabel. Vi danner så talfølgen

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = F_c(x_n) \quad n = 0,1,2,... \tag{13}$$

og spørger, om talfølgen konvergerer, divergerer, går monotont eller svinger eller hvad. Denne opførsel afhænger af c, og spørgsmålet er, hvordan? I eksemplet er c forskydningen i y-aksens retning:

$$F_c(x) = x^2 + c \tag{14}$$

Hvis $c > {}^1/_4$ har parablen ingen skæring med linien $y = x$, så talfølgen divergerer.



Figur 3. Iteration af x^2+c, $c \leq {}^1/_4$.

Hvis $-{}^3/_4 < c \leq {}^1/_4$ har parablen to skæringer med $y = x$. Vi skal løse ligningen

$$x^2 + c = x \tag{15}$$

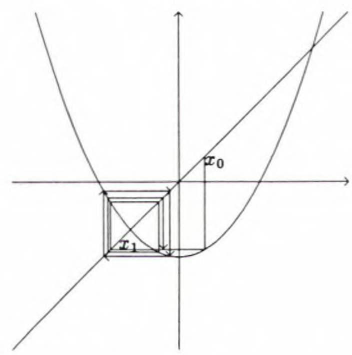
der løses af

$$\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} \tag{16}$$

I disse punkter er parablens tangenthældning 2α jo

$$2\alpha = 1 \pm \sqrt{1-4c} > -1 \tag{17}$$

netop så længe c > $-{}^3/_4$. Det betyder, at hvis startpunktet a er i nærheden af α vil følgen x_n konvergere mod α.



Figur 4. Iteration af x^2+c, $c<-{}^3/_4$.

Når $c < -{}^3/_4$ begynder dansen. Der kan opstå en cykel f.eks. af længde 2. Det betyder, at

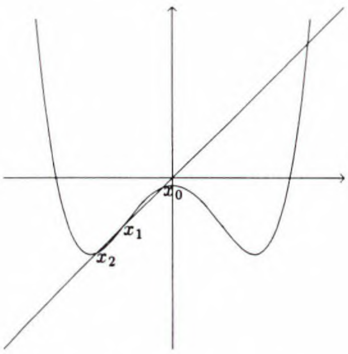
$$x_{n+1} \neq x_n \quad \wedge \quad x_{n+2} = x_n \tag{18}$$

En sådan cykel er ikke svær at finde, fordi den jo er et fixpunkt for $F_c^{\,2}$

$$F_c^2(x) = x \tag{19}$$

eller

$$(x^2+c)^2+c = x \tag{20}$$



Figur 5. Iteration af $(x^2+c)^2+c$.

Men det er lettere, end det ser ud, fordi fixpunkterne for F_c også er fixpunkter for $F_c^{\,2}$. Derfor er rødderne i (15) eller

$$x^2-x+c = 0 \tag{21}$$

også rødder i (20) eller

$$x^4+2cx^2-x+c^2+c = 0 \tag{22}$$

Vi kan simpelthen skrive (22) som

$$(x^2-x+c)(x^2+x+c+1) = 0 \tag{23}$$

De nye rødder, som giver cyklerne, er altså

$$\beta = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-c-1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4c-3} \tag{24}$$

som netop dukker op, så snart $c < -{}^3/_4$.

En sådan cykel er tiltrækkende, hvis fixpunktet for $F_c^{\,2}$ er det. Altså hvis

$$|(F_c^2)'(\beta)| < 1 \tag{25}$$

Nu er

$$F_c^2(x) = (x^2+c)^2+c \tag{26}$$

så

$$(F_c^2)'(x) = 4x(x^2+c) \tag{27}$$

Da β er rod i

$$x^2+x+c+1 = 0 \tag{28}$$

har vi

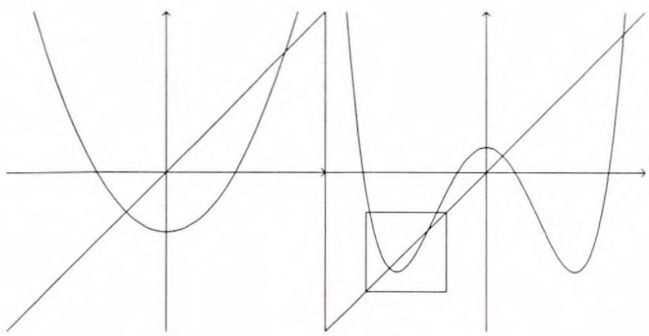
$$\beta^2+c = -1-\beta \quad \wedge \quad \beta^2+\beta = -1-c \tag{29}$$

Derfor er

$$(F_c^2)'(\beta) = 4\beta(b^2+c) = 4\beta(-1-\beta) = -4(-1-c) = 4(1+c) \tag{30}$$

Derfor er (25) opfyldt for

$$-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4} \tag{31}$$



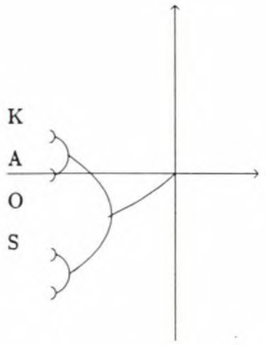
Figur 6. $x^2 - {}^3/_4$ og $(x^2 - {}^5/_4)^2 - {}^5/_4$.

Hvis vi sammenligner graferne for F_c for forskellige værdier af c med graferne for $F_c^{\,2}$ for udvalgte andre værdier af c, ser vi, at de er temmelig ens. Den opførsel, som F_c udviser, f.eks. cykler for $c < -{}^3/_4$, kommer derfor også for $F_c^{\,2}$, blot når $c < -{}^5/_4$.

For c=-2 er der punkter af hver tænkelig periode.

Det betyder, at for en vilkårlig startværdi a i nærheden af 0 vil følgen x_n defineret ved (13) opføre sig uforudsigeligt. Det er denne uforudsigelighed, vi betegner som ''kaos''. Ved start langt fra 0 går følgen mod ∞, - ''normal divergens''.

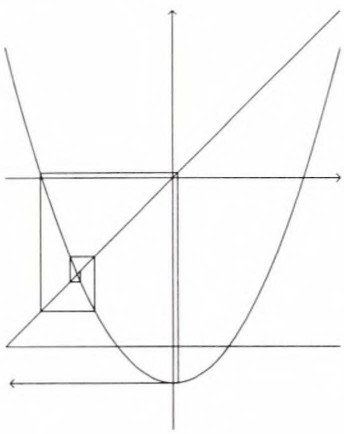
Hvis vi ser på overgangen $c \to -2$, kan vi jo afbilde fixpunkterne og perioderne som ''funktioner'' af c. Det giver diagrammet:



Figur 7. Attraktorer som funktion af c.

Det ses, at dynamikken ændrer struktur fra simpel konvergens til en attraktiv periode af længde 2 ved $c = -^3/_4$, til to perioder ved $c = -^5/_4$ o.s.v. En række ''katastrofer'' for dynamikken.

Også c = -2 er en katastrofe. Når c < -2, vil der være startpunkter i intervallet [-2,2], hvis følger x_n - defineret i (13) - divergerer mod ∞.



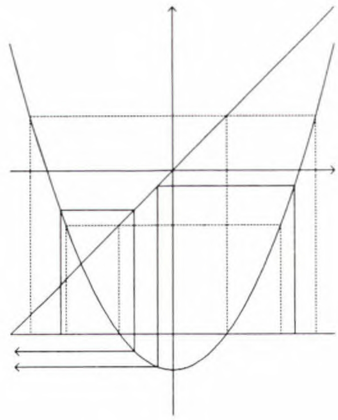
Figur 8. $x^2 - {}^{22}/_9$.

Spørgsmålet er, om der overhovedet findes punkter, a, $-2 < a < 2$, hvis talfølger x_n - defineret ved (13) - forbliver i intervallet.

Det er klart, at ligesom punkterne i det midterste interval bliver smidt udenfor med det samme, så bliver punkterne midt i hver af de andre intervaller sendt ind i det midterste og derfra udenfor.

Vi får altså dannet en proces, der successivt tredeler intervallet og fjerner det midterste og gentages på hver af de yderste.

Det, der bliver tilbage, kalder vi Λ. Denne mængde består af alle intervalendepunkterne, samt alle grænseværdier for konvergente følger af endepunkter.



Figur 9. $x^2 - {}^{22}/_9$.

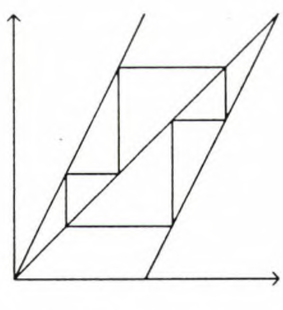
Lad nu $x \in \Lambda$. Vi definerer talfølgen til x, $s(x)$, som

$$s(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots \tag{32}$$

hvor s_j er 0 eller 1, defineret ved

$$s_j = \begin{cases} 0 & F^j(x) \in I_0 \\ 1 & F^j(x) \in I_1 \end{cases} \tag{33}$$

Talfølgen s_j beskriver følgen x_n som den springer fra I_0 til I_1 eller omvendt.



Figur 10. $2x$ mod 1 med følgen fra $a = {}^1/_5$.

Intervallernes endepunkter svarer til de talfølger, der har $s_j = 1$ for $j \geq N$. Derfor vil alle talfølger svare til et punkt i Λ. Nu kan talfølgerne opfattes som tal i intervallet [0,1] i binær kode.

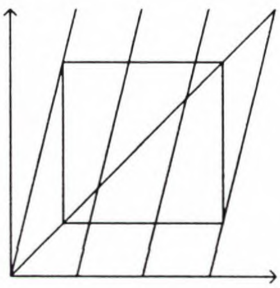
De interessante fænomener afspejles i tallene. Iterationen F svarer til et skift, altså

$$F(s_0 s_1 s_2 ...) = s_1 s_2 s_3 ... \quad (34)$$

altså funktionen fordobling og bortkast af den hele del,

$$g(x) = 2x \bmod 1 \quad (35)$$

En periode for F svarer til en periodisk bimalbrøk, altså et rationalt tal i intervallet. Disse svarer igen til perioderne for g, som vi finder af hver mulig længde:



Figur 11. 2(2x mod 1) mod 1 med følgen fra $a={}^1/_5$.

Denne oversættelse afhang jo ikke af den oprindelige funktions lokale udseende, hvilket forklarer, at der i er orden i kaos. To kaotiske systemer ligner hinanden, nemlig funktionen (36) itereret.

Hvis vi vælger et tilfældigt tal mellem -2 og 2 og itererer $F(x) = x^2 + c$ for et $c < -2$, så vil følgen x_n defineret i (13) med sandsynlighed 1 divergere mod ∞, men man kan være heldig at ramme en følge, der farer rundt som en flue i en flaske. - Det er kaos!

Det er nøjagtig den samme kaotiske opførsel, vi ser på hele intervallet, når c=-2. Vi behøver blot at tage funktionen

$$2 \cos(x 2\pi) \quad (36)$$

Når vi anvender den på (36), får vi jo

$$2\cos(2x2\pi) = 4\cos^2(x2\pi) = (2\cos(x2\pi))^2 - 2 \quad (37)$$

med andre ord, $F_2(x)$. Altså samme kaos!

Referencer:

Ian Stewart: *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, Penguin Books, London (1990)

Mogens Esrom Larsen er ansat ved Københavns Universitets matematiske institut som lektor. Medlem af redaktionen af KVANT.