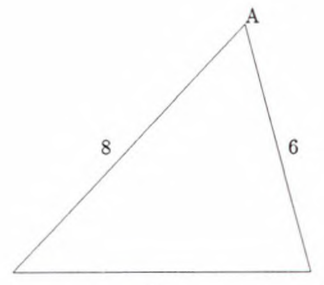
Pæne trekanter

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Indholdet af et foredrag, forfatteren har holdt den 16. januar 1991 i San Francisco for Mathematical Association of America i rækken af "Lesser known geometrical gems", der kan oversættes til "Mindre kendte geometriske perler".



Figur 1. Trekanten 6,7,8

Det har altid været fascinerende at undersøge trekanter med simple forhold mellem vinkler og sider. Er alle tre vinkler lige store, så er siderne det også, og er to vinkler lige store, så er de modstående sider det også.

Det bedst kendte eksempel er tilfældet $\angle A = \angle B + \angle C$. (Denne ligning kan jo også skrives $\angle A = \pi/2$.) Som bekendt må siderne tilfredsstille ligningen $a^2 = b^2 + c^2$, opkaldt efter Pythagoras. Den mindste heltalsløsning er $a = 5$, $b = 3$ og $c = 4$.

Et par andre simple eksempler er $\angle A = 2 \times \angle B$, der giver ligningen $a^2 = b^2 + bc$ med mindsteløsning $a = 6$, $b = 4$ og $c = 5$, og $\angle A = 2 \times \angle B + \angle C$, der giver ligningen $a^2 = b^2 + ac$ med mindsteløsning $a = 4$, $b = 2$ og $c = 3$.

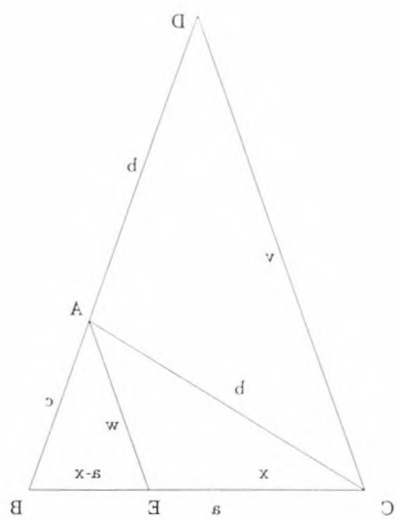
Jeg kan ikke fortsætte på denne måde. Jeg kender ikke vinkelrelationerne for trekanten med siderne 5, 6 og 7. Men trekanten med siderne 5, 7 og 8 har vinkelrelationen $2 \times \angle A = \angle B + \angle C$. Denne vinkelrelation er - svarende til Pythagoras ovenfor - ensbetydende med den enklere $\angle A = \pi/3$. Og ligningen er blot cosinusrelationen $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ med mindste løsning $a = b = c = 1$ og mindste "ikke trivielle" løsning $a = 7$, $b = 3$ og $c = 8$.

Men den næste simple relation mellem vinklerne, $\angle A = 2 \times (\angle B - \angle C)$, giver en overraskelse. Siderne kan ikke "nøjes med" at tilfredsstille en andengradsligning, men må op på en ligning af tredie grad, nemlig

$$ba^2 = (b - c)\,(b + c)^2 \tag{1}$$

Den mindste heltalsløsning er ikke desto mindre igen successiv, $a = 7$, $b = 8$ og $c = 6$.

Vi betragter en vilkårlig trekant, ΔABC med vinkelhalveringslinie AE fra A til a.



Figur 2. Vinkelhalveringslinien deler den modstående side forholdsvist.

Vi forlænger BA ud over A med liniestykket b til D. Derved bliver ΔCAD ligebenet, så $2 \times \angle D = \angle BAC = \angle A$. Altså er $\angle D = \angle BAE$, hvorfor $\Delta BAE \sim \Delta BDC$. Men så gælder

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{c} = \frac{a}{b + c} \tag{2}$$

Vi fortsætter nu tegneøvelsen med at forlænge AE ud over E til F, sådan at $\angle ECF = ½\angle A = \angle BAE$. De to nye stykker kaldes henholdsvis y = CF og z = EF.

Vi har nu følgende fire ensvinklede trekanter

$$\Delta BDC \sim \Delta FAC \sim \Delta BAE \sim \Delta FCE \tag{3}$$

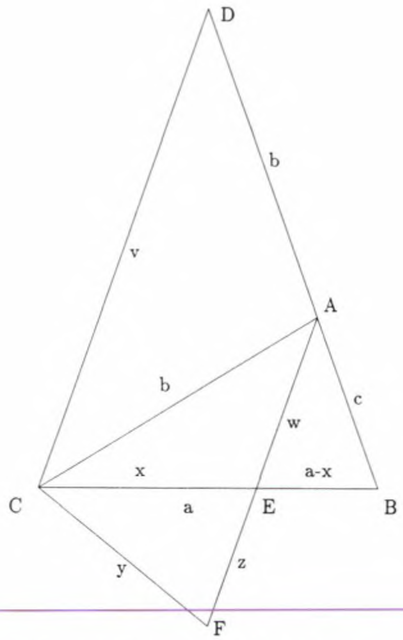
Så langt kan vi altid komme. Lad os nu antage, at vinkelrelationen er opfyldt. Vi skriver den som $\angle B = \angle C + ½\angle A$. Så får vi

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle C + ½\angle A = \angle B = \angle DBC \tag{4}$$

og trekanten ΔBDC er ligebenet, og dermed er de alle fire i (4) ligebenede. Altså er $v = b + c$, $w = c$, $y = x$ og $b = c + z$. Men så er

$$\frac{z}{x} = \frac{b - c}{x} = \frac{x}{b} = \frac{a}{b + c}, \tag{5}$$

som ved multiplikation giver ligningen



Figur 3. De fire ensvinklede trekanter.

$$\frac{b-c}{b} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \qquad (6)$$

hvoraf formlen (1) følger.

Det vanskeligste står tilbage, nemlig at vise, at enhver trekant, der opfylder relationen (1), også opfylder vinkelrelationen. Vi kan altid tegne de fire ensvinklede trekanter til vinkelhalveringslinien, så hvis vi kan vise, at én af dem er ligebenet, så er vi hjemme. Vi vil sigte på at vise, at $x = y$.

De ensvinklede trekanter giver os

$$z = \frac{ay}{b+c} \qquad (7)$$

samt

$$\frac{w}{a-x} = \frac{b}{y} \text{ og } \frac{a-x}{c} = \frac{a}{b+c}, \qquad (8)$$

hvoraf

$$w = \frac{abc}{(b+c)y} . \qquad (9)$$

Disse størrelser indsættes i forholdet

$$\frac{w+z}{y} = \frac{b+c}{a} , \qquad (10)$$

hvoraf vi får ligningen

$$\frac{abc}{(b+c)y^2} + \frac{a}{b+c} = \frac{b+c}{a} , \qquad (11)$$

som skrives om til

$$\frac{bc}{y^2} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 - 1 . \qquad (12)$$

Da (1) er ensbetydende med (6), kan vi skrive det om til

$$\frac{bc}{y^2} = \frac{c}{b-c} \qquad (13)$$

eller bedre

$$y^2 = b(b-c) \qquad (14)$$

Vi bruger nu (6) igen, men den anden vej, og (2):

$$y^2 = b^2\frac{b-c}{b} = b^2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = x^2 . \qquad (15)$$

Hermed er påstanden bevist.

Når man vil finde de heltallige løsninger til ligningen (1), så kan man gøre følgende overvejelser. Da vi altid kan gange en løsning med en faktor, kan vi nøjes med at lede efter løsninger uden en fælles faktor. Hvis nu b og c har en fælles faktor, vil denne også gå op i a. Så vi kan antage, at b og c er primiske, det vil sige uden fælles faktor. Lad nu p^n være den højeste potens af et primtal, p, som går op i b, og lad p^m være den højeste potens af det samme primtal, der går op i c. Så er $b = p^n\hat{b}$ og $c = p^m\hat{c}$. Indsættes i (1), fås ligningen

$$p^n\hat{b}a^2 = p^{3m}(p^{n-m}\hat{b} - \hat{c})(p^{n-m}\hat{b} + \hat{c})^2 \qquad (16)$$

hvoraf følger $n = 3m$. Altså må b være en trediepotens; der findes et x, så $b = x^3$. Endvidere må c være delelig med x, altså $c = x\hat{c}$. Lad nu $z = x^2 - \hat{c}$ så får vi

$$x^3a^2 = x^3z(2x^2 - z)^2 . \qquad (17)$$

Det er nu klart, at z må være et kvadrattal; der findes y, så $z = y^2$. Og så er $c = x^3 - xy^2$ og $a = y(2x^2 - y^2)$.

Med andre ord, en parameterfremstilling af løsningerne er

$$(a,b,c) = r(2x^2y - y^3, x^3, x^3 - xy^2) \qquad (18)$$

For $x = 2$ og $y = 1$ fås den nævnte løsning.