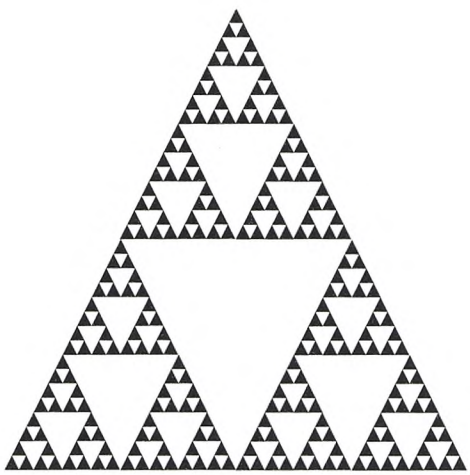
HVORFOR ER BINOMIALKOEFFICIENTER NÆSTEN ALTID LIGE?

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Early exceptions eclipse eventual essentials.
Richard K. Guy.



Figur 16. Sierpìnski's net.

Sierpìnski's net er dannet ved, at vi først har fjernet den fjerdedel, der selv er en trekant på spidsen i midten af figuren. Tilbage bliver nu tre ens trekanter, der alle er retvendte. Vi gentager nu processen på hver af de tre trekanter og fjerner altså nu tre trekanter på spidsen, ialt $\frac{3}{16}$ af den oprindelige trekant. Således fortsættes i det uendelige, en proces, der er er blevet berømt under overskriften ''fraktal'' i de senere år.

Et godt spørgsmål er, hvor stor en del af trekanten har vi fjernet? Det er klart, at vi ikke har fjernet hele trekanten, hvis vi kun fjerner det indre af hver af trekanterne på spidsen. Der bliver et smukt netværk tilbage. Men det samlede areale af de fjernede trekanter er stort, nemlig

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=1$$

Med andre ord, de fjernede trekanter fylder i virkeligheden hele den oprindelige trekant ud. Tilbage er kun maskerne i et net.

Denne simple iagttagelse har en forbløffende anvendelse på binomialkoefficienter.

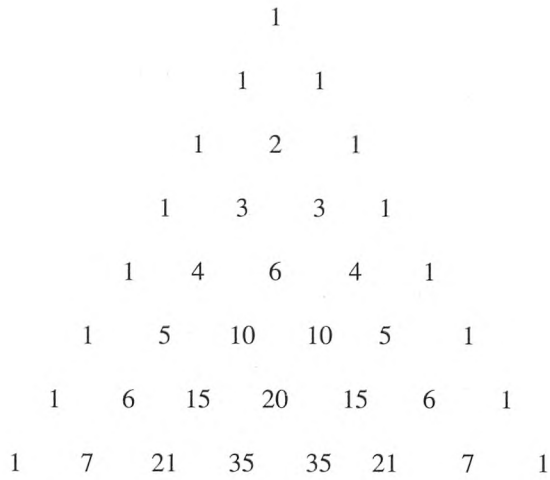
Binomialkoefficienten er antallet af måder, hvorpå vi kan udtage k *elementer af en mængde på* n *elementer, og skrives:* $\binom{n}{k}$.

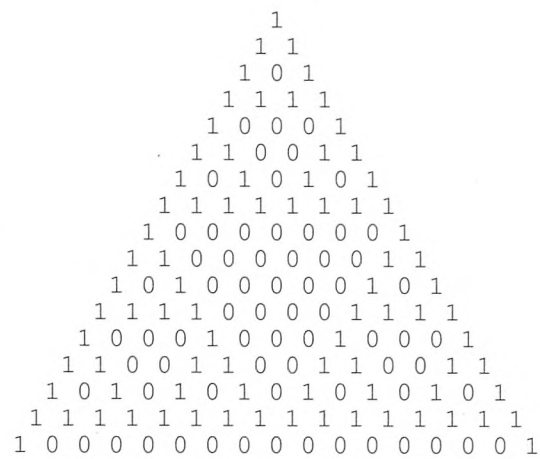
Det kan man angive en formel for, men vi har kun brug for den simple rekursionsformel,

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

Denne formel er i virkeligheden indlysende. Når vi skal udtage de k elementer af mængden med n+1 elementer, vælger vi at iagttage et bestemt af disse. Enten bliver dette taget ud, og så kan de resterende k-1 udtages af de resterende n elementer på $\binom{n}{k-1}$ måder, eller dette element bliver ikke taget ud, og så skal vi udtage de k elementer af de resterende n elementer, og det kan gøres på $\binom{n}{k}$ måder. Summen af de to er samtlige måder.

Når vi derfor starter med at udtage 0 af n på 1 måde, og n af n på 1 måde, så kan vi finde samtlige binomialkoefficienter ved successivt at lægge naboer sammen. Dette mønster kaldes Pascal's trekant efter den franske matematiker og filosof, Blaise Pascal (1623-1662):





Vi stiller os nu det spørgsmål, hvor ofte er en binomialkoefficient lige, og hvor ofte er den ulige? Ovenfor er der 27 ulige og 9 lige. Men det er jo ikke nogen repræsentativ stikprøve, vi har jo valgt at se på det øverste lille hjørne af en uendelig trekant.

Hvis vi gentager Pascals trekant med angivelsen 1 for et ulige tal og 0 for et lige, får vi et mønster. Og rekursionsformlen gælder stadig, hvis vi modificerer den med regnereglen 1+1=0. Vi ser nu, at vi repeterer et mønster, hvor der jævnligt optræder hele rækker af 1'taller efterfulgt af en række med 1'taller i hver ende og 0'er imellem. Og vi ser, hvorledes et 1'tal giver skrå kanter af 1'taller, der indrammer trekanter af 0'er. Disse to fænomener optræder, hver gang n antager formerne $n=2^m-1$ henholdsvis $n=2^m$.

Hvis vi gør status og normaliserer trekanten, hver gang vi er et skridt fra den næste potens af 2, ser vi, at vi genfinder skridtene i processen, der danner Sierpínski's net.

Men det betyder jo, at det mønster, der dannes af 0'er, fylder relativt mere og mere for i grænsen at fylde det hele, mens 1-tallerne bliver til det omtalte net. Med andre ord, i modsætning til den statistiske antydning er sandsynligheden for, at en tilfældig binomialkoefficient er ulige, lig med 0, mens sandsynligheden for, at den er lige, er lig med 1.

Referencer

1. Richard K. Guy, *Strong Law of Small Numbers*, American Mathematical Monthly **95** (1988)
2. Ian Stewart, *Game, Set & Math - Enigmas and Conundrums* -, Basil Blackwell, Oxford, 1989
3. Marta Sved, *Divisibility - With Visibility*, Mathematical Intelligencer **10**, 56 (1988)



Mogens Esrom Larsen er ansat ved Københavns Universitets matematiske institut som lektor uden særlige kvalifikationer.