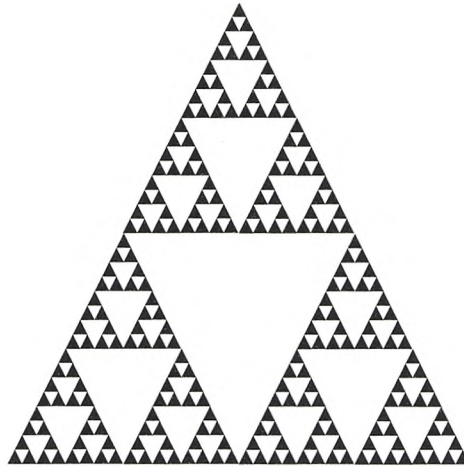


HVORFOR ER BINOMIALKOEFFICIENTER NÆSTEN ALTID LIGE?

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Early exceptions eclipse eventual essentials.

Richard K. Guy.



Figur 16. Sierpinski's net.

Sierpinski's net er dannet ved, at vi først har fjernet den fjerdedel, der selv er en trekant på spidsen i midten af figuren. Tilbage bliver nu tre ens trekante, der alle er retvendte. Vi gentager nu processen på hver af de tre trekante og fjerner altså nu tre trekante på spidsen, ialt $\frac{3}{16}$ af den oprindelige trekant. Således fortsættes i det uendelige, en proces, der er blevet berømt under overskriften "fraktal" i de senere år.

Et godt spørgsmål er, hvor stor en del af trekanten har vi fjernet? Det er klart, at vi ikke har fjernet hele trekanten, hvis vi kun fjerner det indre af hver af trekante på spidsen. Der bliver et smukt netværk tilbage. Men det samlede areale af de fjernede trekante er stort, nemlig

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$$

Med andre ord, de fjernede trekante fylder i virkeligheden hele den oprindelige trekant ud. Tilbage er kun maskerne i et net.

Denne simple iagttagelse har en forbløffende anvendelse på binomialkoefficienter.

Binomialkoefficienten er antallet af måder, hvorpå vi kan udtage k elementer af en mængde på n elementer, og skrives: $\binom{n}{k}$.

Det kan man angive en formel for, men vi har kun brug for den simple rekursionsformel,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Denne formel er i virkeligheden indlysende. Når vi skal udtage de k elementer af mængden med $n+1$ elementer, vælger vi at iagttage et bestemt af disse. Enten bliver dette taget ud, og så kan de resterende $k-1$ udtages af de resterende n elementer på $\binom{n}{k-1}$ måder, eller dette element bliver ikke taget ud, og så skal vi udtage de k elementer af de resterende n elementer, og det kan gøres på $\binom{n}{k}$ måder. Summen af de to er samtlige måder.

Når vi derfor starter med at udtage 0 af n på 1 måde, og n af n på 1 måde, så kan vi finde samtlige binomialkoefficienter ved successivt at lægge naboer sammen. Dette mønster kaldes Pascal's trekant efter den franske matematiker og filosof, Blaise Pascal (1623-1662):

