Zenons Paradoks
— Ren logik eller besnærende retorik?

Mikkel Thorup, Oxford University

Vi befinder os i Grækenland år 500 f.Kr.
— Achilleus, Achilleus, Achilleus ... lyder det taktfast fra tilskuerne på det store stadion. Manden, hvis navn de råber, har taget opstilling ved starten af løbebanen. Han er høj og meget atletisk bygget. Han tager råbene med en ophøjet ro. Det er ikke første gang. Lang tids hård træning betyder, at han nu er kendt som den hurtigste dødelige græske kriger. Det eneste andet på banen er tilsyneladende blot en stor grå sten ved hans fod.
Startskuddet lyder. Achilleus bliver bare stående, men der sker noget med stenen. Først kommer et lille hoved frem, dernæst fire små ben og tilsidst en lille bitte hale — en skildpadde. Skildpadden har på dyrenes vegne udfordret Achilleus, og for at bevise den menneskelige races totale overlegenhed har Achilleus taget mod udfordringen. Langsomt men sikkert kommer skildpadden op på alle fire og begynder at stolpre afsted.
Achilleus tøver. Han ser nærmest ud, som om han føler sig lidt til grin — Hvorfor skal han, Achilleus, løbe om kap med dette kluntede og langsomme dyr. Pludselig kigger skildpadden tilbage...
— Du kan ikke indhente mig.
Så starter Achilleus. På et øjeblik når han det sted, hvorfra skildpadden råbte, men skildpadden er i mellemtiden nået et stykke længere frem.
— Du kan ikke indhente mig.
Og sådan bliver de ved. Hvergang Achilleus kommer til et sted, hvorfra skildpadden har råbt, er skildpadden nået et stykke længere frem, hvorfra den igen råber. Achilleus får derfor aldrig *indhentet skildpadden.*

Denne lille historie er min egen dramatiserede version af "Zenons Paradoks". Det paradoksale ved historien er, at den forudser noget helt urimeligt; nemlig at Achilleus, sin hurtighed til trods, *ikke* vil kunne indhente den langsomme skildpadde.

Hvorfor beskæftige sig med historien?
Tager vi med på første tur med en helt ny rutschebane; så gør vi det i fuld tillid til at selv det største bump ikke vil kaste os af. Vi regner med, at en ingeniør, udfra vognens fart og bumpenes størrelser, har beregnet, at det ikke vil ske.

Ingeniørens beregninger er at opfatte som en serie af forhåbentligt holdbare argumenter, der gør det muligt at forudse, hvordan en køretur med rutschebanen vil udvikle sig.

At kunne forudse på den måde benyttes meget, når ny teknik skal udvikles.[1]

At kunne stole på ny teknik, som f.eks. den nye rutschebane, afhænger derfor i høj grad af, om vi kan afgøre, hvornår argumenter fører til sikre forudsigelser — hvornår argumenter er holdbare.

Hvad nu med "Zenons Paradoks"?
Det indeholder noget, der ligner en holdbar argumentation, og vi ville derfor gerne kunne stole på konklusionen: at Achilleus, sin hurtighed til trods, aldrig vil kunne indhente den langsomme skildpadde.

Nu er det "tilfældigvis" sådan, at vi gennem vores almindelige erfaring véd, at konklusionen er gal. Vi ved, at én, der er hurtig, altid vil kunne indhente én, der er langsommere. Vi kan derfor stemple argumentationen som uholdbar.

Der er nu to muligheder:
- Enten finder vi mindst én god forklaring på, hvorfor argumentationen i "Zenons Paradoks" ikke holder.
- Eller også må vi erkende, at vi ikke altid er i stand til at afgøre, hvorvidt argumenter holder. Det betyder i sin yderste konsekvens, at vi ikke kan stole helt på forudsigelser baseret på argumentation. Dermed vil i hvert fald en vigtig del af grundlaget for den tekniske udvikling bryde sammen.

Mange bække små ...
Kan det virkelig passe, at skildpadden ved sine taktisk velplacerede råb kan forhindre den langt hurtigere Achilleus i nogensinde at indhente sig?

Rent praktisk kunne man indvende, at efterhånden som Achilleus nærmer sig skildpadden, vil tiden, imellem at skildpadden skal råbe, blive så kort, at den slet ikke vil kunne nå at åbne munden. Skildpaddens råb er imidlertid kun tænkt som pædagogiske billeder på bestemte tidspunkter. Om de rent faktisk vil kunne nå at blive udført, er derfor ikke afgørende for argumentationen.

Der er et andet, mere alvorligt problem ved argumentationen: Det er som om den, udfra at skildpadden kan råbe *uendeligt* mange gange, når frem til, at skildpadden kan råbe

[1] Man kan sige at hele målet med naturvidenskaben er at finde de teorier, der giver de bedste muligheder for korrekt at forudse kemiske, fysiske og biologiske hændelsesforløb.

uendeligt lang tid. For at indse, at man ikke kan slutte sådan, bliver man nødt til at kende lidt til, hvad der sker, når man lægger mange små størrelser sammen.

Tag situationen til en fest, hvor der er ét stykke kage tilbage. Ingen kan få sig selv til at tage hele stykket, fordi det er det sidste. Når der er én, der vil have et stykke, nøjes vedkommende derfor med kun at tage halvdelen af hvad der er tilbage. Gør alle sådan, vil man kunne blive ved med at skære stykker af kagen. Alligevel vil man aldrig sammenlagt kunne komme til at spise mere kage, end der oprindeligt var.

Konklusionen må være, at et stykke kage stort set er det samme som halvdelen plus halvdelen af halvdelen plus halvdelen af halvdelen af halvdelen ... af det samme stykke kage. Dette begrunder den matematiske ligning:

$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

For at kunne bruge ligningen mod Zenons argumentation, må vi antage, at Achilleus løber præcis dobbelt så hurtigt som skildpadden. Da Achilleus egentlig løber mange gange hurtigere, kan denne antagelse kun være til skildpaddens fordel.

At Achilleus løber dobbelt så hurtigt som skildpadden betyder, at skildpadden i tiden mellem to råb kun når halvt så langt som Achilleus. Skildpaddens forspring og dermed tiden mellem råbene bliver derfor halveret mellem hvert råb — altså noget i stil med kageeksemplet.

Vi kan nu prøve at sammenholde tiden, t, fra skildpaddens første til skildpaddens andet råb med summen over tiderne mellem de resterende råb: Da tiden mellem råbene bliver halveret mellem hvert råb, bliver tiden mellem andet og tredie råb halvt så stor som tiden mellem første og andet råb — altså $t/2$. Tiden mellem tredie og fjerde råb bliver igen halvt så stor — altså $t/4$. Således kunne vi fortsætte, så vi får at summen over tidsrummene mellem råbene fra og med det andet bliver[2]:

$$t/2 + t/4 + t/8 + \cdots = (1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots)t = 1t$$

Lægger vi nu tiden mellem første og andet råb, t, til, får vi summen af tiderne mellem alle råbene. Den samlede tid skildpadden kan råbe i, bliver derfor $t+t=2t$.

Da vi ved, at skildpadden når at råbe både første og anden gang, kan tiden, t, mellem disse to råb ikke være uendelig — altså må t være endelig. Men så må også $2t$ være endelig, og vi kan derfor konkludere, at skildpadden sammenlagt kun kan råbe endeligt lang tid.

Vi har nu vist, at vi *ikke*, udfra at skildpadden kan råbe *uendeligt* mange gange, kan slutte, at den kan råbe *uendeligt* lang tid. Tværtimod har vi vist, at den på et tidspunkt — efter et *endeligt* stykke tid — må blive færdig med at råbe.

Hinsides uendeligheden???

Det ser nu ud til, at vi har fundet fejlen i "Zenons Paradoks" — for når først skildpadden er færdig med at råbe, skulle der ikke være noget, som forhindrer Achilleus i at overhale den.

Som afslutning på historien bringes et interview med den uheldige skildpadde, der i sin skam har trukket sig ind under sit skjold og igen ligner en stor grå sten:

— *Det var synd du tabte. Jeg hørte, at du, indtil du blev overhalet, råbte et eller andet en gang imellem. Hvornår råbte du egentlig for sidste gang?*
— Aldrig!
— *Jamen du holdt da op med at råbe, da du blev overhalet.*
— Det er rigtigt, men jeg fik alligevel aldrig råbt en sidste gang. Det må du også selv kunne indse, for hvis jeg fra et sted havde råbt for sidste gang, så skulle det betyde, at Achilleus aldrig kom til dette sted[3], og hvordan skulle han så have indhentet mig.
— *Hmm... Du gjorde altså noget en gang imellem, som du på et tidspunkt holdt op med, uden at få det gjort for sidste gang. Det kan da ikke passe.*

Ja. Hvad skete der egentlig? Både det intervieweren og skildpadden siger lyder rimeligt, så i sin helhed udgør samtalen en overbevisende argumentation for, at selve overhalingen er umulig.

Vi står altså stadig, som da vi startede, over for en tilsyneladende holdbar argumentation for noget forkert — at overhalingen er umulig. Da dette ikke er acceptabelt, må vi til at finde huller i de to's udtalelser.

Intervieweren siger, det ikke kan passe, at skildpadden aldrig får råbt for sidste gang. Har han ikke ret? Er det ikke i strid med vores erfaring, at man skulle kunne gøre noget en gang imellem og så holde op med det, uden at få det gjort for sidste gang?

Jo, det er det; men vores erfaring stammer fra en verden, hvor alting højst kan foregå et *endeligt* antal gange. Hvis vi forsøger at bruge vores erfaring på skildpaddens *uendelige* serie af råb, gør vi noget, vi ikke har belæg for.

Interviewerens kategoriske afvisning er derfor ikke holdbar.

Havde intervieweren været opmærksom på dette, kunne han have afsluttet med at sige:

— *Det, du siger, lyder meget interessant, for det betyder, at hvis man gør noget uendeligt mange gange, så kan man ikke nødvendigvis snakke om den sidste gang, man gør det.*

---

[2] Her er det ligningen fra før bruges.

[3] Ifølge "reglerne" skal skildpadden råbe når Achilleus kommer til det sted, hvorfra den sidst har råbt.

Og dermed ville han have givet en mulig forklaring på ''Zenons Paradoks''.

Med interviewerens forklaring er vi ude over det fundamentale problem – en argumentation for noget forkert, der ikke kunne bortforklares. Desværre kan vi ikke være sikre på, at det er den eneste forklaring, før vi har undersøgt skildpaddens argumentation.

Skildpadden konkluderer, at den aldrig får råbt en sidste gang. Det afgørende ved dens argumentation er, at den hævder, at den umuligt kan råbe fra et sted, Achilleus ikke kommer til. Dette lyder rimeligt, men igen er det et spørgsmål, om det ikke blot er vores erfaring, der spiller os et puds.

Vi har alle en idé om, at tidspunkter kan ligge vilkårligt tæt: Fra vores hverdag ved vi, at givet to tidspunkter kan vi altid pege på et tredie tidspunkt, der ligger midt i mellem dem, og sådan synes vi, at man i hvert fald teoretisk burde kunne fortsætte i det uendelige – men kan man det?

Med kagen ved vi, at den i virkeligheden kun kan deles, indtil der er ét molekyle tilbage. Svarende til molekylet, der er den mindste stofenhed, kunne vi forestille os, at der var en mindste tidsenhed; et tidskvant. Havde man så to tidspunkter adskilt ved ét tidskvant, ville der ikke være nogen tidspunkter imellem dem.

Indførelsen af tidskvanter kunne give endnu en mulig forklaring på ''Zenons Paradoks''. For at vise dette, har jeg lavet endnu en version af interviewet med den uheldige skildpadde.

– *Det var synd du tabte. Jeg hørte, du råbte et eller andet en gang imellem. Hvornår råbte du egentlig for sidste gang?*

– Da Achilleus manglede et tidskvant i at indhente mig.

– *Nå ... Hvad skete der så?*

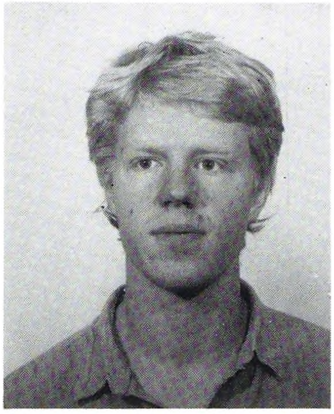
– Jo. I løbet af næste tidskvant lykkedes det Achilleus, at komme forbi det sted jeg havde råbt fra, indhente mig og komme uden om Zenons argumentation.

Tilbage til virkeligheden

Vi har nu ikke blot én, men to mulige forklaringer på ''Zenons Paradoks''.

Hvilken af de to forklaringer, der er den rigtige, kan vi ikke afgøre, for i vores virkelige verden kan vi ikke lave forsøg med uendeligt mange råb eller uendeligt små tidsrum.

Omend forklaret, står ''Zenons Paradoks'' tilbage som et smukt eksempel på, hvordan vi med snedig retorik kan besnæres til at tro det umulige.



Mikkel Thorup er født 1965 og licentiatstuderende i datalogi på Danmarks Tekniske Højskole, men for tiden ved Oxford University.