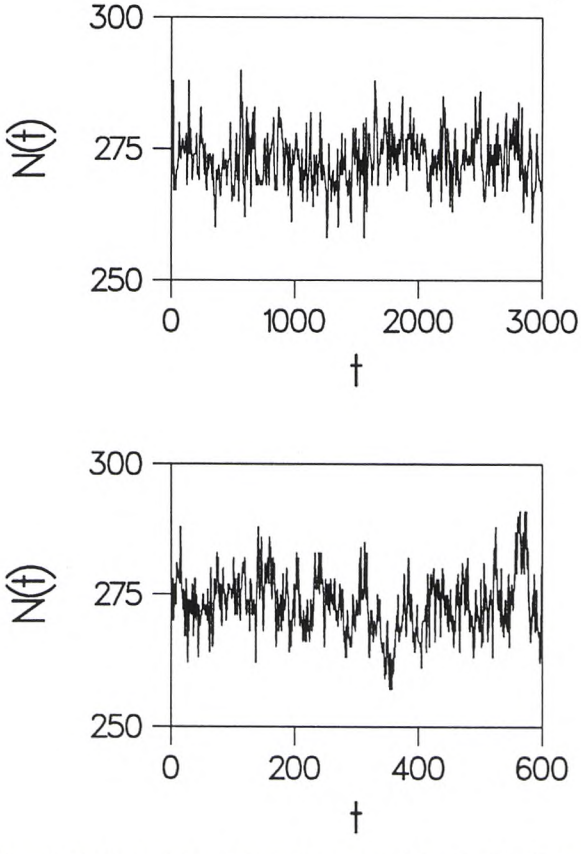
Fraktaler og 1/*f*-støj; to sider af samme dynamiske tilstand.

Henrik Jeldtoft Jensen, NORDITA, Københavns Universitet

Denne artikel handler om et forsøg på at udvikle en sammenfattende teori for to meget udbredte fænomener. Det ene er de rumlige strukturer, man kalder fraktaler, det andet består i tidslige signaler som udviser, hvad man betegner som 1/*f*-spektra.

Fraktaler optræder de mest forskellig artede steder i naturen[1]; således er bjerge, stjerne fordelingen på himlen og spin konfigurationer i magneter alle eksempler på fraktale strukturer. De er skalainvariante, d.v.s. de ligner atter sig selv efter at være blevet forstørret et antal gange. Tænk f. eks. på et blomkålshoved eller se på figur 6.



Figur 1. Tidslig variation af det totale antal partikler på et 32×32 gitter. Den nederste graf viser en forstørrelse af en del af tidsaksen på den øverste.

Tidslige 1/*f*-spektra findes bl.a. i elektriske modstande, i vandstrømmen i Nilen, i motorvejstrafikken igennem storbyer og i lysudsendelsen fra stjerner[2,3]. I alle disse tilfælde viser det sig, at den tidslige variation af det betragtede signal ikke blot indeholder nogle få karakteristiske frekvenser. Undersøger man styrken, hvormed de enkelte perioder bidrager til signalet, finder man, at alle frekvenser bidrager, og ydermere er det således, at de lange perioder bidrager mest. Styrken af en given frekvens f er proportional med $1/f^{\beta}$, hvor $\beta \sim 1$. Deraf kommer navnet "1/*f*-støj". I fig. 1 er vist et eksempel på et tidsligt signal, som har denne egenskab. Selvom tidsaksen er blevet forstørret fem gange i fig. 1b ligner signalet fortsat sig selv.

Hvordan kan det være at fraktaler og 1/*f*-spektra dukker op så mange vidt forskellige steder? Er fraktaler og 1/*f*-spektra forbundet og er der en fælles bagved liggende årsag til at de findes i tilsyneladende ikke beslægtede systemer? Det er præcis tilfældet i følge Bak, Tang og Wiesenfeld[5]. De foreslog fornylig, at dynamiske systemer bestående af mange vekselvirkende partikler eller med mange frihedsgrader af sig selv udvikler sig til en tilstand, som er karakteriseret ved en total mangel på længde og tidsskala, tilstanden er skalainvariant. (Korrelationsfunktioner og fordelingsfunktioner udviser simpel potenslovsopførsel.) Tilstanden siges at være kritisk med en hentydning til kritiske tilstande ved termodynamiske faseovergange, og de betegnede fænomenet som selvorganiseret kritisk opførsel. Fraktaler og 1/*f*-spektra fremkommer som henholdsvis de rumlige og tidslige karakteristika ved denne tilstand.

Vi vil nu først give en mere detaljeret beskrivelse af, hvorledes den selvorganiserede kritiske tilstand tænkes at fremkomme og dens egenskaber, derefter vil vi gennemgå en konkret numerisk model.

Tag en spand med sand og en plan flade. Begynd nu langsomt at drysse sand ned på fladen. I begyndelsen vokser sandbunken jævnt op uden at sandet skrider ned ad siden. Når hældningen af sandet når en vis værdi, begynder laviner at opstå. Vi kan forestille os, at der lokalt på bunkens side findes en bestemt kritisk hældning, ved hvilken sandet begynder at løbe. Hælder vi for meget sand på, sænkes hældningen lokalt, ved at sand løber ud. Er hældningen på et sted under den kritiske værdi, vil den kunne vokse, når der bliver hældt sand på eller ved, at sand på bunkens side transporteres til og fra området. Sandbunken driver sig selv ind i en dynamisk stationær tilstand.

Lad os nu et øjeblik holde inde med at drysse mere sand på bunken, og forsøge at undersøge den tilstand sandbunken

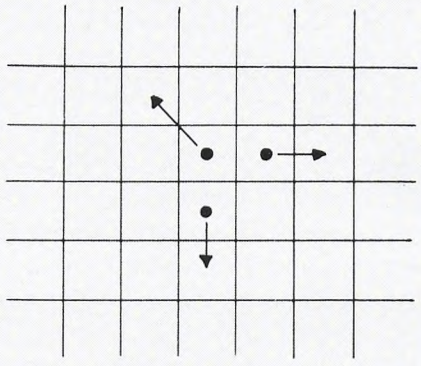
Gittergasmodellen

1. Tag et skakbræt med N_x felter i x-retningen og N_y felter i y-retningen. Lad $n(x,y)=1$ betyde, at feltet (x,y) indeholder en partikel og $n(x,y)=0$ betyde at feltet er tomt. Fordel nu partikler på tilfældig måde på brættets felter. Vi må aldrig placere mere end én partikel i et felt, men felter kan udemærket være tomme.

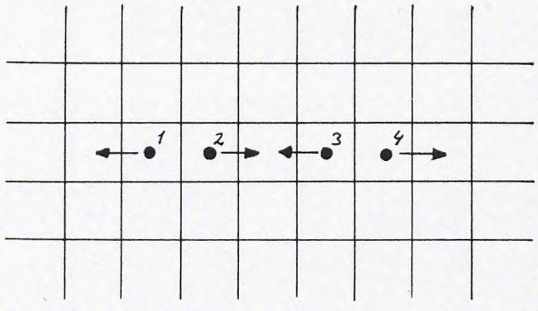
2. Partikler i nabofelter frastøder hinanden. Vi definerer kraften på en partikel i feltet (x_0,y_0) ved
$$F_x=n(x_0\text{-}1,y_0)\text{-}n(x_0+1,y_0)$$
$$F_y=n(x_0,y_0\text{-}1)\text{-}n(x_0,y_0+1)$$
Partiklen i feltet (x_0,y_0) skal flyttes til det nabofelt, som kraften $\boldsymbol{F}$ peger imod. Vi bestemmer dette felt ved at beregne
$$I=nint[F_x/|\boldsymbol{F}|],\quad J=nint[F_y/|\boldsymbol{F}|],$$
hvor $nint[x]$ betegner det hele tal, som ligger nærmest ved x. Vi ønsker at flytte partiklen fra $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0)$ til $\boldsymbol{r}_1=(x_0+I,y_0+J)$, men gør det kun, hvis feltet $\boldsymbol{r}_1$ er tomt og dersom ingen andre partikler skal flyttes ind i feltet med en kraft større end den kraft, som virker på partiklen i feltet $\boldsymbol{r}_0$. Reglen er, at dersom flere partikler ønsker at flytte ind i det samme tomme felt, flyttes den af partiklerne, som føler den største kraft og de andre partikler bliver, hvor de er. Hvis alle partikler, som ønsker at blive flyttet ind i feltet $\boldsymbol{r}_1$, påvirkes af samme kraft, flytter vi *ingen* af disse partikler. Vi går altså igennem alle partikler på brættet, før vi begynder at flytte partiklerne.

3. Specielle regler gælder for kant felterne:
$(1,y)$ og (N_x,y) hvor $y\in[1,N_y]$
$(x,1)$ og (x,N_y) hvor $x\in[1,N_x]$
Vi slutter hvert tidsskridt af med at fjerne alle partikler, som befinder sig i disse felter. D.v.s. partiklerne forsvinder ud over brættets kant. Nu er alle disse felter tomme og næste tidsskridt indledes med at introducere partikler i kantfelterne med sandsynligheden p per felt (f.eks. med $p=0,2$). En partikel placeret i et kantfelt påvirkes forudenved krafterne fra evt. nabopartikler af en enhedskraft vinkelret på brættets kant i retning ind på brættet. Denne kraft skal forsøge at drive partiklen ind på brættet.

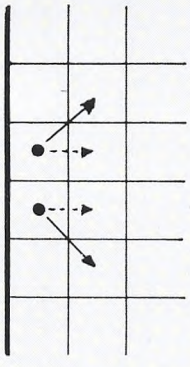
4. Modellens dynamik består i at udføre punkt 2 og punkt 3 igen og igen.



Figuren viser et eksempel på en partikelkonfiguration. Pilene angiver retningen af den resulterende kraft på de forskellige partikler. Alle tre partikler kan flyttes til de felter pilene peger imod.



I denne konfiguration kan partikel nummer 1 og 4 flyttes. Partikel nummer 2 og 3 ønsker begge at flytte ind i midterfeltet, men da de begge påvirkes af en kraft af størrelsen én, skal ingen af dem flyttes.



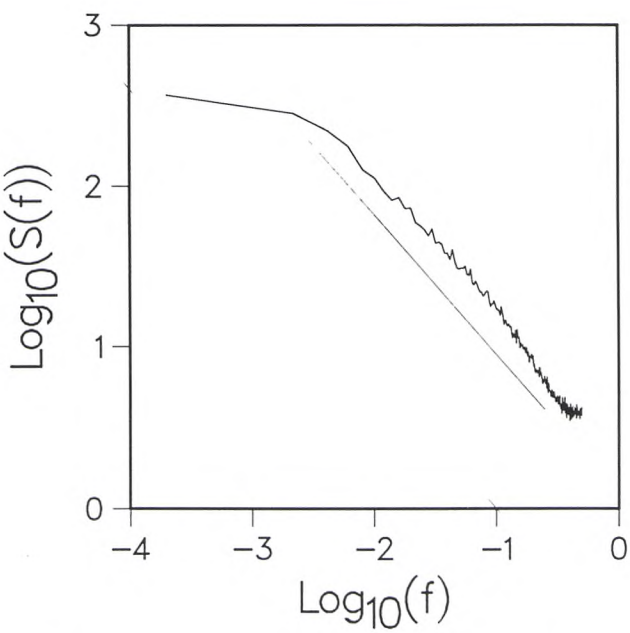
Kræfter på partikler i kantfelter. Den stiplede pil angiver den under punkt 3 omtalte kantkraft, den fuldtoptrukne pil viser den resulterende kraft.

nu befinder sig i. Til det formål kaster vi et enkelt sandskorn på bunken. Nogle gange forårsager det, at en stor lavine udløses, andre gange giver det ekstra sandskorn kun anledning til, at et par korn triller en smule ned, og atter andre gange udløser vort sandskorn slet ikke noget skred. Et skred udløses, dersom vi ved at addere et ekstra korn gør den lokale hældning større end den kritiske. Lad os kalde et sådant sted på bunkens side for minimalt stabilt. Adderer vi et sandskorn til en minimalt stabil position vil sand skride fra denne position til nabopositionerne nedenfor. Dette kan bevirke at hældningen i disse nye positioner bliver overkritisk, så sandskred udløses her. En lavine eller kædereaktion er derved sat igang, den vil forløbe, indtil vi har relakseret alle de minimalt stabile positioner, som er rumligt forbundet med det sted, hvor vi placerede det første sandskorn. Sandbunkens side består i den kritiske tilstand af et netværk af minimalt stabile positioner.

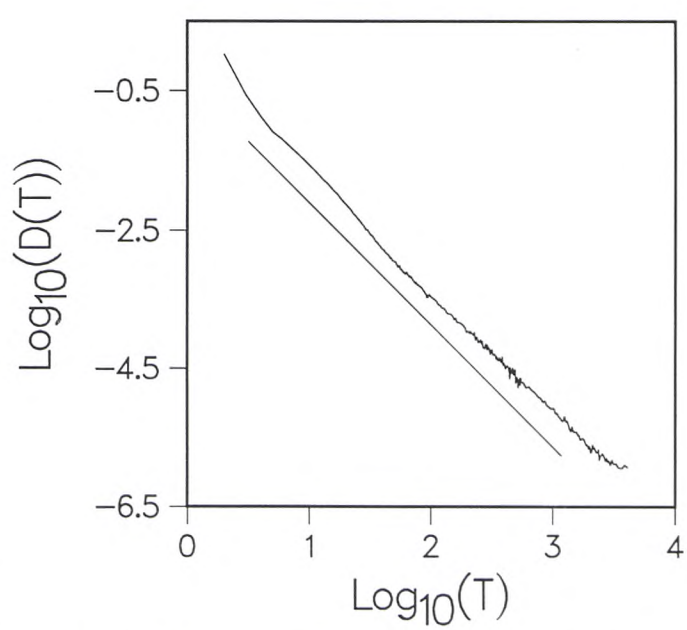
Sandbunke sproget er hensigtsmæssigt til at beskrive ideen om den selvorganiserede kritiske tilstand; men skal ikke tages for bogstaveligt. Eksperimenter[6] har ikke fundet $1/f$-støj i sandbunker. I artiklerne i Ref.5 behandlede Bak, Tang og Wiesenfeld en numerisk sandbunke model. De troede, at denne model indeholdt $1/f$-støj, men senere simulationer[7] har vist, at dette ikke er tilfældet. Hverken modellen eller rigtige sandbunker ser ud til at indeholde fraktaler. Lad os derfor nu forlade sandbunken og istedet beskrive en anden model[8], som både indeholder fraktaler og $1/f$-spektra.

Modellen består af frastødende partikler, som bevæger sig rundt på et gitter. Hvert felt på gitteret kan indeholde en eller ingen partikel. Vi tænker os at en kraftig gnidningsmodstand bevirker, at partiklerne bevæger sig overdæmpet, d.v.s. de flytter sig kun, når en resulterende kraft virker på dem. Så deres bevægelsesligning er ikke Newtons anden lov, men følgende diffusive bevægelses ligning, $\eta \mathbf{v} = \boldsymbol{F}$ hvor η er en gnidningskoefficient, $\mathbf{v}$ hastigheden af den betragtede partikel og $\boldsymbol{F}$ den resulterende kraft på partiklen. I hvert tidsskridt opdaterer vi hele gitteret på engang. Vi beregner den resulterende kraft på en partikel forårsaget af vekselvirkningen med eventuelle nabopartikler. Vi undersøger om det nabofelt, som den resulterende kraft peger imod er tomt, er det tilfældet flytter vi den betragtede partikel til dette felt, i modsat fald lader vi blot partiklen blive, hvor den er. Partiklerne kan forlade systemet over dets fire kanter, endvidere introduceres partikler på kantfelterne med en konstant sandsynlighed i hvert tidsskridt[9].

Nu lader vi blot systemet udvikle sig i tiden. Uanset hvilken begyndelseskonfiguration vi starter fra, vil modellen selv bevæge sig ind i en stationær tilstand, som er karakteriseret ved at antallet af partikler på gitteret som funktion af tiden, $N(t)$, har et $1/f$-spektrum. I fig. 1 er vist et eksempel på, hvorledes $N(t)$ kan se ud, når systemet udvikler sig i den stationære tilstand. Styrken af frekvenserne er vist på figur 2 og denne spektraltæthed, $S(f)$, er proportional med $1/f^{0,9}$.



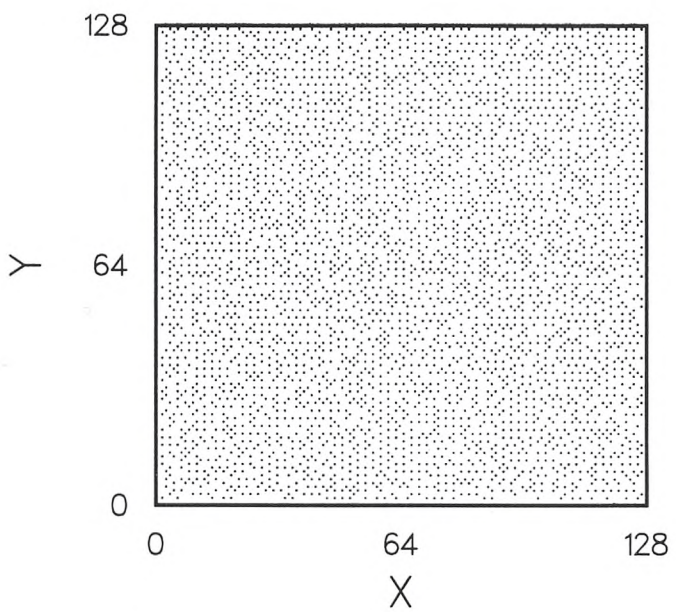
Figur 2. Spektraltætheden af den tidslige variation i antallet af partikler på et 64×64 gitter. Der er midlet over 31 forskellige tidssekvenser alle bestående af 5000 tidsskridt. Den rette linje har hældningen -0,9.



Figur 3. Fordelingen af levetider for samme system som i Fig. 2. Den rette linje har hældningen -1,8.

En given partikel bidrager til $N(t)$ i tidsrummet fra partiklen bliver anbragt på gitterets kant til den forlader gitteret igen. Vi kan kalde dette tidsrum, T, for partiklens levetid, og vi kan numerisk måle, hvorledes fordelingen af levetider, $D(T)$, ser ud. I figur 3 er vist levetidsfordelingen for systemet fra figur 2. Over et bredt tidsinterval finder vi at $D(T) \sim 1/T^{1,8}$. Den stationære tilstand har således fordelingsfunktioner som udviser potenslovsopførsel.

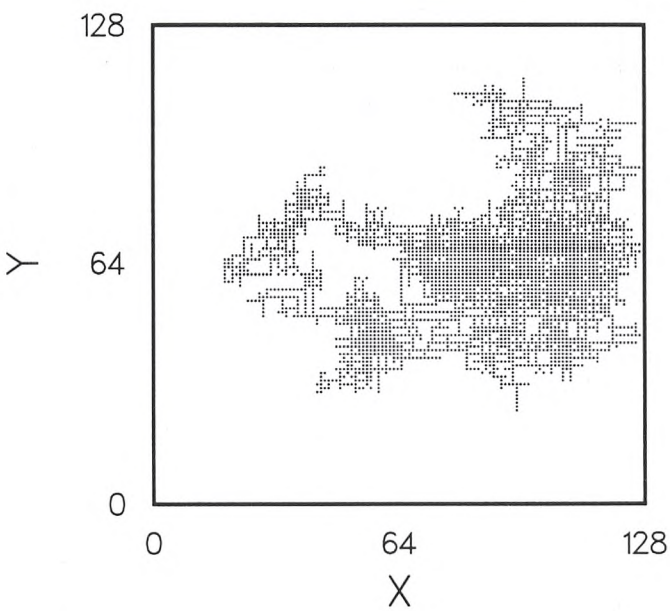
Der findes en sammenhæng imellem fordelingen af levetider og spektraltætheden[7]. Hvis $N(t)$ er en lineær sum af ukorrelerede enkelt signaler med forskellige levetider T, som er fordelt efter $D(T) \sim 1/T^{\alpha}$, da vil $S(f) \sim 1/f^{\beta}$, hvor $\beta = 3-\alpha$ for $\alpha > 1$ og $\beta = 2$ for $\alpha < 1$. Korrelationer imellem de enkelte signaler kan ødelægge denne sammenhæng. Inden for den numeriske målenøjagtighed ser det ud til, at relationen er opfyldt for spektraltætheden og den tilhørende levetidsfordeling vist i h.h.v. figur 2 og figur 3.



Figur 4. Partikel konfiguration da partiklerne er kommet til ro efter at vi er holdt op ned at bringe nye partikler ind på gitteret.

Den tidslige opførsel af modellen udgør et eksempel på at Bak, Tang og Wiesenfeld's vej til $1/f$-spektra kan forekomme. Vi vender os nu til de rumlige aspekter af modellen.

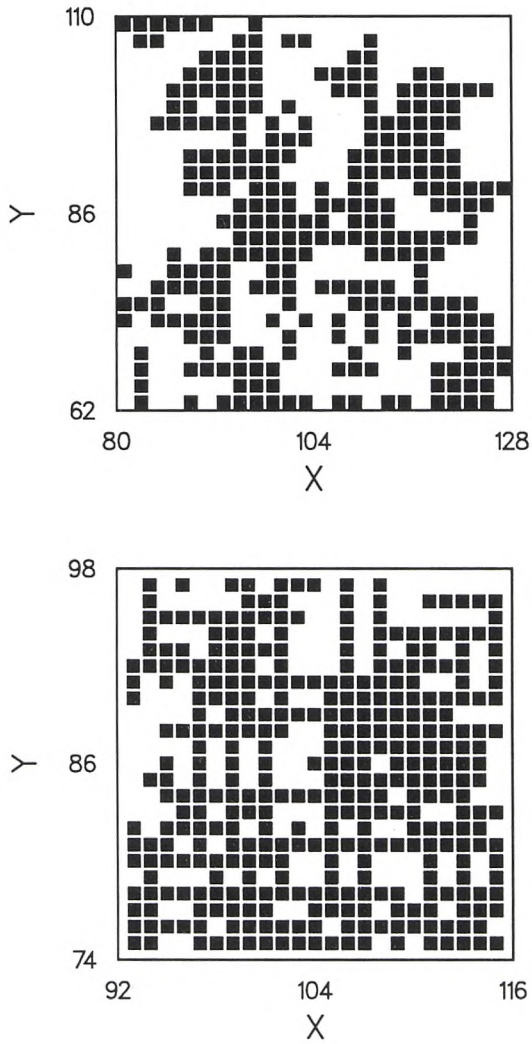
Betragt systemet i den stationære kritiske tilstand. Holder vi nu op med at introducere nye partikler på gitterets kant, går bevægelsen i stå i løbet af nogle tidsskridt. I figur 4 er vist en resulterende konfiguration efter, at partiklerne er kommet til ro. I denne model er der kun vekselvirkning mellem nærmeste-nabo-partikler på et kvadratisk gitter. Vi kan nu på følgende måde undersøge, hvorledes partiklerne i denne tilstand er korrelerede. Vi anbringer en ekstra partikel i et eller andet tomt felt, denne nye partikel vil skubbe til partikler på nabofelterne og bevægelse vil blive sat igang. Nu følger vi systemet til det atter falder til ro. I figur 5 er vist alle de felter, hvorpå bevægelse blev induceret da vi anbragte en ny partikel i gitterets center. Alle disse felter er således dynamisk korrelerede med det felt, hvor vi anbragte den første partikel. Der findes sammenhængende områder, som formodentlig skyldes at vi har en mindste længdeskala givet ved størrelsen af de enkelte felter på gitteret, men ellers ligner den rumlige struktur, som er fremkommet i figur 5, en fraktal. I figur 6 har vi fokuseret på en del af figuren, området i den øverste figur er blevet forstørret med en faktor to i den nederste figur. Kvalitativt ligner de to figurer hinanden, altså er klyngen af punkter i figur 3 til en vis grad skalainvariant. Massedimensionen opnået ved den såkaldte boks-tælling er omkring 1.7.



Figur 5. Klynge bestående af dynamisk korrelerede gitterfelter i Figur 4. Se i øvrigt teksten.

Den ovenfor beskrevne model viser, at $1/f$-spektra og fraktale strukturer kan opstå som produkter af en dynamisk kritisk tilstand. Gittergas modellen er således et konkret eksempel på Bak, Tang og Wisenfeld's ide om, at selvorganiseret kritisk opførsel ligger til grund for observerede $1/f$-spektra og fraktaler. Modellen er forøvrigt mig bekendt den eneste, som *både* indeholder fraktaler og $1/f$-spektra.

Der er naturligvis et langt skridt fra en simpel numerisk model, som er diskret både i rum og tid, til de komplicerede systemer, hvor man i naturen møder fraktaler og $1/f$-spektra. Der er mange spørgsmål at besvare, før vi ved om korreleret mange partikel opførsel altid er årsagen bag $1/f$-spektra og fraktaler. Hvilken betydning har den diskrete natur af de

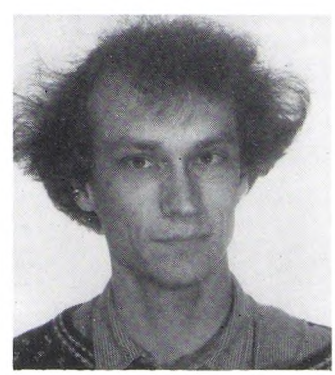


Figur 6. En del af klyngen i Figur 4 set under forskellig forstørrelse.

numeriske modeller? Hvad er det, som bestemmer om et givet system vil have en selvorganiseret kritisk tilstand eller ej? Hvorledes kommer man videre fra de numeriske eksperimenter til en egentlig teori for fænomenet selvorganiseret kritisk opførsel? Alle disse spørgsmål bliver studeret for tiden. Modeller inspireret af turbulens, kosmologi, jordskælv, biologi, økonomi med videre er blevet præsenteret[10]. Bak, Tang og Wiesenfeld's ambitiøse og tiltrækkende ide om selvorganiseret kritisk opførsel er endnu for ny til, at vi kan afgøre, hvilke fysiske systemer begrebet kan anvendes på.

Referencer:

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Fransisco, 1982).
2. W. H. Press, Commun. Mod. Phys. C **7**, 103 (1978).
3. M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys. **60**, 537 (1988).
4. D. K. C. MacDonal, *Noise and Fluctuations: An Introduction* (Wiley, New York, 1962).
5. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381,(1987) and Phys. Rev. A **38**, 364 (1989).
6. H. M. Jaeger, Chu-heng Liu, and Sidney R. Nagel, Phys. Rev. Lett. **62**, 40 (1989).
7. H. J. Jensen, K. Christensen and H. C. Fogedby, Phys. Rev. B **40**, 7425 (1989).
8. H. J. Jensen, Preprint.
9. I det tidsskridt en partikel er introduceret på et kant felt, lader vi en enheds kraft virke på partiklen for at forsøge at skubbe partiklen ind på gitteret.
10. Mig bekendt er det kun den her beskrevne model, som vides at udvise både 1/*f*-spektra og fraktaler; de fleste undersøgelser har beskæftiget sig med at vise at modellernes fordelingsfunktioner har potenslovs form.



Henrik Jeldtoft Jensen er licentiat i teoretisk fysik fra Århus Universitet, 1986. Her arbejdede han primært med magnetiske systemer. I forbindelse med et toårigt ophold ved McMaster University i Canada studerede han computersimulering af flux linie dynamik i type II superledere. Denne interesse har han bibeholdt i sin nuværende ansættelse som stipendiat ved NORDITA.